Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. Susanna Röblitz, Dr. T. Dierkes,

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2014

Abgabe: 01.07.2014 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben seien $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(it)$ und eine stetige Funktion $f : sp(\gamma) \to \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$|\int_\gamma f(z)\, dz| \leq 4 \max\{|f(z)| \mid z \in sp(\gamma)\}$$

gilt.
Hinweis: Nutzen Sie Polarkoordinaten um $|\int_0^{2\pi} f(\exp(it)) \exp(it)\, dt|$ zu beschreiben und die Eulersche Formel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass für alle geschlossenen Kurven γ, deren Spur in G liegt, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ gilt.
Sei $z_0 \in G$. Für alle $z \in G$ sei γ_z ein Polygonzug in G von z_0 nach z. (Mit ein bisschen Topologie kann man schnell beweisen, dass es einen solchen Polygonzug immer geben muss. Sie dürfen es hier ohne Beweis verwenden.)
Zeigen Sie, dass die Funktion $F : G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta$ wohldefiniert und Stammfunktion von f ist.
Sie haben dann gezeigt, dass f unter den obigen Voraussetzungen an f immer eine Stammfunktion besitzt. Gilt die Aussage auch, falls G nicht zusammenhängend ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \int_\gamma \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\, dz \quad \text{und} \quad \text{(b)} \int_\gamma \frac{1}{(z+1)^3(z-1)}\, dz,$$

wobei γ der positiv orientierte Kreisrand von $B(-1, 1)$ sei.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $f'(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt.
Zeigen Sie, dass f eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Fortsetzung besitzt.