

Prof. Dr. Frank Noé  
Dr. Christoph Wehmeyer  
Tutoren:  
Florian Litzinger (Di. 10-12; Di. 12-14)  
Maikel Nadolski (Mi. 12-14; Mi. 14-16)

## 9. Übung zur Vorlesung **Numerik I**

Abgabe: Donnerstag, 19. Juni 2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer

### **Aufgabe 1 (Bernoulli-Polynome, 1T + 2T + 2T)**

Wir bezeichnen mit  $B_n(x)$  das  $n$ -te Bernoulli Polynom und mit  $B_n$  die  $n$ -te Bernoulli-Zahl.

a) Zeigen Sie, dass für  $n \geq 2$  gilt:

$$B_n(0) = B_n(1).$$

b) Zeigen Sie, dass für  $f \in C^2[0, 1]$  gilt:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \frac{1}{2}B_2(f'(1) - f'(0)) \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(x) B_2(x) dx.$$

c) Zeigen Sie, dass für  $f \in C^{2n+2}[0, 1]$  gilt, dass

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \\ + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 f^{(2n+2)}(x) B_{2n+2}(x) dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil b).

### **Aufgabe 2 (Extrapolation, 2P + 1P + 1P)**

a) Schreiben Sie eine Funktion  $y = \text{AitkenNeville}(f, x, x_0)$ . Diese Funktion soll zu gegebener Funktion  $f$ , gegebenen Stützstellen  $x = (x_0, \dots, x_n)$  das Interpolationspolynom von  $f$  an der Stelle  $x_0$  mit Hilfe des Aitken-Neville-Tableaus auswerten.

b) Reproduzieren Sie damit die Beispiele zur Extrapolation aus dem Numerik-I-Skript. Berechnen Sie also den Funktionswert  $f(0)$  für die Funktionen  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  und  $f(x) = \sqrt{x}$  durch Extrapolation. Als Stützstellen verwenden Sie bitte  $x = (x_0, \dots, x_n)$  mit  $x_i = 2^{-i}$ , für  $n = 1, \dots, 5$ . Plotten Sie jeweils den Fehler

zum echten Funktionswert in einem halblogarithmischen Plot. Plotten Sie dazu als Vergleich auch den Fehler zwischen echtem Funktionswert und dem Funktionswert  $f(x_n)$  am kleinsten Gitterpunkt.

c) Führen Sie für das erste Beispiel auch die Extrapolation in  $h^2$  aus. Berechnen Sie auch hier wieder den Fehler zum echten Funktionswert und fügen Sie ihn in Ihren ersten Plot ein.