Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Florian Litzinger (Di. 10-12; Di. 12-14)
Maikel Nadolski (Mi. 12-14; Mi. 14-16)

7. Übung zur Vorlesung **Numerik I**

Abgabe: Donnerstag, 5. Juni 2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabe 1 *(Newton-Verfahren, 1T+1T+2T)*

a) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Formel für den nächsten Newton-Iterationsschritt x_{n+1} in Abhängigkeit von der aktuellen Iteration x_n an.
b) Die Formel aus Teil a) liefert eine Funktion $\phi(x)$, die den nächsten Newton-Schritt in Abhängigkeit vom aktuellen Wert x angibt. Zeigen Sie, dass $\phi(x) > 0$ für $x < 0$ und $\phi(x) < 0$ für $x > 0$ gilt. Was bedeutet das für die Newton-Iteration?
c) Zeigen Sie, dass es ein $R > 0$ gibt, sodass $\phi(R) = -R$ gilt. Was bedeutet das für die Newton-Iteration?

Aufgabe 2 *(Newton-Côtes-Formeln, 1T+3P)*

a) Beweisen Sie Satz 4.1. aus dem Numerik-I-Skript: Für alle $f, \Delta f \in C[a,b]$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{|I(f) - I(f+\Delta f)|}{|I(f)|} &\leq \kappa(I(f)) \frac{\|\Delta f\|_\infty}{\|f\|_\infty} \\ \kappa(I(f)) &= (b-a)\frac{\|f\|_\infty}{|I(f)|}. \end{aligned}$$

b) Schreiben Sie jeweils eine Funktion, welche die summierte Simpson-Regel bzw. die summierte 3/8-Regel verwendet, um das Integral einer Funktion f zu einer vorgegebenen Aufteilung des Definitionsbereiches zu berechnen. Integrieren Sie mit beiden Methoden die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ über dem Intervall $[0,1]$ mit einem äquidistanten Gitter zu den Schrittweiten $h = 1, \ldots, 500$. Plotten Sie jeweils den Fehler zum exakten Wert $I(f) = \log(2)$ in einem logarithmischen Plot und bestätigen Sie die Konvergenz vierter Ordnung beider Methoden.