

Prof. Dr. Frank Noé  
Dr. Christoph Wehmeyer  
Tutoren:  
Florian Litzinger (Di. 12-14; Di. 16-18)  
Maikel Nadolski (Mi. 12-14; Mi. 14-16)

## 3. Übung zur Vorlesung Numerik I

Abgabe: Donnerstag, 8. Mai 2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer

### Aufgabe 1 (*Polynomial Least Squares, 3 P*):

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \exp(-\alpha x)$ ,  $\alpha > 0$  auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$ . Wir verwenden ein äquidistantes Gitter zur Schrittweite  $h = \frac{1}{100}$ , unsere Gitterpunkte sind also  $t_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, 100$ . Daraus erzeugen wir den Datenvektor  $b$  mit den Einträgen  $b_i = f(t_i)$ . Berechnen Sie den Least Squares Fit zu den Daten  $b$  durch ein Polynom vom Grad  $n = 1, 2, 3, 4$  für  $\alpha = 0.01, 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$ . Berechnen Sie auch jeweils das Residuum  $r$ . Generieren Sie drei Plots: Im ersten Plot zeigen Sie bitte die echten Daten im Vergleich mit den Approximationen für alle Werte von  $n$ , für  $\alpha = 0.01$ . Im zweiten Plot zeigen Sie bitte dasselbe für  $\alpha = 5$ . Im dritten Plot zeigen Sie bitte das Residuum in Abhängigkeit von  $\alpha$  für alle Werte von  $n$ .

### Aufgabe 2 (*QR-Zerlegung, 2 + 1 P*):

Gegeben sei die Least Squares Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Nehmen Sie an, dass für  $A$  bereits die  $QR$ -Zerlegung berechnet wurde, sodass  $A = QR$  mit einer orthogonalen Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und einer oberen Dreiecksmatrix  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

a) Geben Sie eine Formel für die  $QR$ -Zerlegung an, wenn ein Messwert in der ersten Zeile zu  $A$  hinzugefügt wird, ohne die Zerlegung komplett neu zu berechnen. Wie berechnet man also  $\tilde{A} = \tilde{Q}\tilde{R}$ , wenn  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} w^T \\ A \end{pmatrix}$ ? Benutzen Sie dabei, dass man zu gegebener Matrix  $S$  eine orthogonale Transformation  $Q^*$  finden kann, die  $S$  in obere Dreiecksgestalt transformiert, sodass also

$$Q^*S = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ & 0 & * \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie genau eine solche Transformation aussieht, werden wir in der nächsten Woche behandeln.

b) Geben Sie eine Formel für die  $QR$ -Zerlegung an, wenn in der  $k$ -ten Zeile ein Messwert hinzugenommen wird.