Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren: Anna Dittus, Felix Mann, Dominik Otto

3. Übung zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: Freitag, 15.05.2015, 12:15 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

`http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaII15`

Aufgabe 1 *(Neville I, 3T):*

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, sowie die Funktionswerte $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 1$ und $f(x_2) = 3$.
Berechnen Sie für diese Stützstellen und Funktionswerte die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 mittels der in der Vorlesung eingeführten Newtonschen dividierten Differenzen

$$f[x_i, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_k] - f[x_i, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_i}\,, \quad 0 \leq i < k \leq n\,,$$

und

$$f[x_i] = f(x_i)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,,$$

und vergleichen Sie Ihr Resultat mit den Koeffizienten aus Aufgabe 1 vom letzten Übungsblatt.

Aufgabe 2 *(Fehlerabschätzung, 2T):*

Sei $f \in C^{n+1}[a, b]$, und $p_n \in \mathcal{P}_n$ die Lösung der Interpolationsaufgabe

$$f(x_k) = p_n(x_k)\,, \quad k = 0, \ldots, n\,, \quad \text{mit} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,.$$

Zeigen Sie mittels des in der Vorlesung eingeführten Interpolationsfehlers,

$$f(x^*) - p_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x^* - x_k)\,, \quad \xi \in (a, b)\,,$$

dass die Interpolation für $f \in \mathcal{P}_n$ exakt ist.

Aufgabe 3 *(Neville II, 4P)*:

a) *(2P)* Schreiben Sie eine eine Funktion

```
function y = neville(X, F),
```

welche die Koeffizienten des Newton-Polynoms

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

zu den Stützstellen $\mathtt{X} = (x_0, \ldots, x_n)$ und Funktionswerten $\mathtt{F} = (f(x_0), \ldots, f(x_n))$ mittels des Neville-Verfahrens (Algorithmus 1.6) auswertet.
b) *(2P)* Seien $\mathtt{X}= (x_0 \ldots, x_n)$, mit

$$x_k = 10\frac{k}{n} - 5\,, \quad k = 0, \ldots, n\,,$$

und $\mathtt{F}= (f(x_0), \ldots, f(x_n))$, mit

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}\,,$$

gegeben. Plotten Sie die Funktion $f(x)$ und das Newton-Polynom $p_n(x)$, mit $n = 5$ und $n = 10$, im Intervall $[-5, 5]$. Was fällt Ihnen auf, wird die Interpolation mit steigender Anzahl an Stützstellen besser?
Hinweis: In der Vorlesung und Fachliteratur beginnt die Indizierung meist mit 0. Matlab beginnt die Indizierung hingegen mit 1. Achten Sie also darauf, die Indices entsprechend zu verschieben.