

Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

6. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: Freitag, 05.12.2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

<http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaI>

Aufgabe 1 (*Stabilität, 5T*):

a) (*3T*) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \log(\sqrt{x})$, $x > 0$. Bestimmen Sie die relative Stabilität des Algorithmus, welcher die Funktion f in genau dieser Form auswertet. Geben Sie auch die Teilfunktionen an.

b) (*2T*) Geben Sie einen besseren Algorithmus zur Auswertung von f an, dessen Stabilität unabhängig von x und beschränkt ist. Der Algorithmus soll ebenfalls nur zwei Teilfunktionen verwenden.

Aufgabe 2 (*Fixpunkt, 6P + 5T*):

a) (*6P*) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion **FixedPoint**, die eine reelle Zahl x_0 und eine positive Zahl $\text{tol} > 0$ als Eingaben bekommt. Die Funktion soll die Abbildung $f(x) = \cos(x)$ wiederholt auf den Wert x_0 anwenden. Beginnend mit x_0 wird also die nächste Iteration durch

$$x_{k+1} = \cos(x_k)$$

berechnet. Dies soll so lange geschehen, bis sich zwei aufeinander folgende Iterationsschritte um weniger als tol unterscheiden. Wählen Sie nun $N = 500$ zufällige Startpunkte x_0 aus dem Intervall $I = [\cos(1), \cos(\cos(1))] \approx [0.5403, 0.8576]$, und wenden Sie Ihre Funktion auf diese Werte an. Setzen Sie dabei $\text{tol} = 10^{-8}$. Was beobachten Sie? Hinweis: Schauen Sie sich die Funktion **rand** an.

b) (*2T*) Begründen Sie, dass die Folge der Iterierten x_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ aus Aufgabenteil a) stets im Intervall I liegt.

c) (*3T*) Berechnen Sie die relative Kondition κ_{rel} der Funktion f und zeigen Sie, dass κ_{rel} auf dem Intervall I echt kleiner als Eins ist.

d) (*Freiwillig, +3T*) Wir bezeichnen mit $f^n(x_0) = x_n$ die Abbildung, die $x_0 \in I$ auf den n -ten Iterationsschritt, beginnend mit x_0 , abbildet. Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabenteil c), um zu zeigen, dass die relative Stabilität der Funktion f^n beschränkt bleibt.