

Prof. Dr. Frank Noé  
Dr. Christoph Wehmeyer  
Tutoren:  
Katharina Colditz; Anna Dittus;  
Felix Mann; Christopher Pütz

## 10. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Lösung

### Aufgabe 1 (*LR-Zerlegung, 4T*):

Berechnen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 8 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die einzelnen Schritte wie in der Vorlesung besprochen aus und geben Sie die beiden Faktoren am Ende an.

### Lösung

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 0 & -1/4 & 1 & \\ 6 & -4 & 48/33 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ & 4 & 9 & 7 \\ & & 33/4 & 39/4 \\ & & & -310/11 \end{pmatrix}.$$

(1 Punkt pro richtigem Iterationsschritt, 1 Punkt für das Aufstellen der Faktoren).

### Aufgabe 2 (*Hessenberg-Matrix, 6T*):

Eine quadratische Matrix  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt obere Hessenberg-Matrix, wenn sie fast eine obere Dreiecksmatrix ist, nur die erste Subdiagonale darf noch besetzt sein. In Formeln heißt das, dass

$$h_{ij} = 0, \forall i \geq j + 2.$$

- a) (1T) Bestimmen Sie die Elemente  $l_{i1}$ ,  $i = 2, \dots, n$  der zugehörigen  $L$ -Matrix, die im ersten Schritt des Gauss-Algorithmus berechnet werden. Wie unterscheidet sich die modifizierte Matrix  $H^{(1)}$  von der Ausgangsmatrix  $H$ ? Nehmen Sie hier und im Folgenden an, dass alle auftretenden Pivotelemente nicht verschwinden.
- b) (1T) Geben Sie eine Formel für die gesamte Matrix  $L$  an. Dabei können Sie die Schreibweise  $h_{ij}^{(k)}$  für die modifizierte Matrix nach dem  $k$ -ten Schritt verwenden.
- c) (4T) Geben Sie einen besseren Algorithmus (als die Standard Gauss-Elimination) zur Berechnung der LR-Zerlegung einer oberen Hessenberg-Matrix  $H$  an. Bestimmen Sie den Rechenaufwand dieses Verfahrens.

### Lösung

- a) Aus der Formel  $l_{i1} = \frac{h_{i1}}{h_{11}}$  folgt, dass nur der Eintrag  $l_{21}$  ungleich Null ist und alle anderen gleich Null sind. Folglich geht in  $H^{(1)}$  nur die zweite Zeile in eine veränderte Zeile  $h_{2j}^{(1)}$  über, alle anderen Zeilen bleiben unverändert.
- b) Das Argument aus Teil a) lässt sich für alle weiteren Schritte wiederholen, im  $k$ -ten Schritt ist stets nur das Element  $l_{k+1,k} \neq 0$ , und nur die  $k+1$ -te Zeile wird verändert. Die Matrix  $L$  lässt sich daher als

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ h_{21}/h_{11} & 1 & & & \\ 0 & h_{32}/h_{22}^{(1)} & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & h_{n,n-1}/h_{n-1,n-1}^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben.

- c) Der vereinfachte Algorithmus muss also stets nur eine Zeile verändern:

---

```

1: for k=1,...,n-1 do
2:    $l_{k+1,k} = \frac{h_{k+1,k}^{(k-1)}}{h_{kk}^{(k-1)}}$ 
3:    $h_{k+1,k}^{(k)} = 0$ 
4:   for j=k+1,...,n do
5:      $h_{k+1,j}^{(k)} = h_{k+1,j}^{(k-1)} - l_{k+1,k} h_{kj}^{(k-1)}$ 
6:   end for
7: end for

```

---

Wir zählen nach, dass wir im  $k$ -ten Schritt der äußeren Schleife genau  $n - k + 1$  Punktoperationen vornehmen. Damit erhalten wir für den Aufwand:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} n - k + 1 &= n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= n - 1 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \\
&= \mathcal{O}(n^2).
\end{aligned}$$

(2 Punkte für den Algorithmus und 2 Punkte für die Aufwandsabschätzung).

### Aufgabe 3 (Gauss-Algorithmus, 8P):

- a) (7P) Schreiben Sie drei Matlab-Funktionen, welche die Berechnung der LR-Zerlegung einer Matrix  $A$ , die Lösung eines unteren Dreieckssystems  $Lx = b$  durch Vorwärts-Substitution, sowie die Lösung eines oberen Dreieckssystems  $Rx = b$  durch Rückwärts-Substitution umsetzen.
- b) (1P) Testen Sie Ihre Funktionen aus Teil a), indem Sie für  $n = 2, \dots, 20$  die Hilbert-Matrix  $H_n$  erzeugen und das lineare Gleichungssystem

$$H_n \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung lösen. Dabei soll die rechte Seite  $\mathbf{b}_n$  einfach der ersten Spalte von  $H_n$  entsprechen. Vergleichen Sie jeweils die berechnete Lösung  $\mathbf{x}_n$  mit der korrekten Lösung, dem ersten Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

#### Lösung

Siehe Code. 3 Punkte für die LR-Zerlegung und jeweils zwei für Vorwärts- und Rückwärts-Substitution. 1 Punkt für den Test. Es sollte für alle Fälle funktionieren.