

Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

5. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Lösung

Aufgabe 1 (*Torschuss I, 8T*):

Wir wollen das in der Vorlesung skizzierte Torschussproblem konkret lösen. Sie kennen die Formel für die Überflughöhe

$$H(v) = x_0 - g \frac{x_0^2}{v^2},$$

mit dem Abstand zum Tor $x_0 = 16\text{m}$, der Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und der Anfangsgeschwindigkeit v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Mittelpunkt der Torlatte befindet sich in $h_0 = 2.50\text{m}$ Höhe.

1. Stellen Sie die Gleichung $H(v_0) = h_0$ nach v_0 um und zeigen Sie damit, dass die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \approx 13.6392 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ genau zum Lattentreffer in $h_0 = 2.50\text{m}$ Höhe führt.
2. Zeigen Sie, dass die absolute Kondition der Funktion H im Punkt v_0 durch den Wert

$$\begin{aligned}\kappa_{abs}(v_0) &= \frac{2(x_0 - h_0)^{3/2}}{\sqrt{g}x_0} \\ &\approx 1.9796\text{s}\end{aligned}$$

gegeben ist.

3. Für kleine Störungen Δv in der Anfangsgeschwindigkeit gilt die Abschätzung

$$\Delta h \leq \kappa_{abs}(v_0)\Delta v$$

für die Abweichung in der Überflughöhe $\Delta h = |h_0 - H(v_0 + \Delta v)|$. Benutzen Sie diese Abschätzung, um Δv so zu wählen, dass $\Delta h \leq \text{tol} = 0.04\text{m}$ gilt. In diesem Fall würde der Ball noch immer die Torlatte treffen und zurückspringen. Lösung: $\Delta v \leq 0.0202 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Lösung

1. Umstellen der Gleichung liefert

$$v_0 = \frac{\sqrt{g}x_0}{\sqrt{x_0 - h_0}}.$$

Einsetzen der Werte für g, x_0, h_0 liefert das Ergebnis. (2 Punkte).

2. Die absolute Kondition berechnet sich mit Hilfe der Ableitung von H als

$$H'(v_0) = 2g \frac{x_0^2}{v_0^3}.$$

Einsetzen von v_0 aus Teil 1) liefert:

$$\begin{aligned} H'(v_0) &= 2g \frac{x_0^2(x_0 - h_0)^{3/2}}{g^{3/2}x_0^3} \\ &= 2 \frac{(x_0 - h_0)^{3/2}}{\sqrt{g}x_0}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte liefert das Ergebnis. (3 Punkte).

3. Die Abschätzung erlaubt uns, Δv so zu wählen, dass $\kappa_{abs}\Delta v \leq \text{tol}$ gilt, denn dann ist automatisch auch $\Delta h \leq \text{tol}$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta v &\leq \frac{\text{tol}}{\kappa_{abs}} \\ &= \frac{0.04}{1.9796} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 0.0202 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

(3 Punkte).

Aufgabe 2 (Torschuss II, 10P):

a) Mit Hilfe des Befehls **randn(1,n)** können Sie sich einen Vektor der Länge n erzeugen, der normalverteilte Zufallszahlen enthält. Diese Zahlen haben u.a. die Eigenschaft, dass ihr Mittelwert für $n \rightarrow \infty$ gegen Null läuft und ihre durchschnittliche quadratische Abweichung vom Mittelwert für $n \rightarrow \infty$ gegen Eins konvergiert. Schreiben Sie ein Matlab Programm, mit dem Sie sich davon überzeugen können. Das Programm soll $N = 100$ mal einen solchen Zufallsvektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ der Länge $n = 500$ erzeugen und seinen Mittelwert $m(x)$ und quadratische Abweichung $s(x)$ berechnen:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \\ s(x) &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m(x))^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Plotten Sie die Werte $m(x)$ und $s(x)$ für alle erzeugten Vektoren in eine Graphik. Wiederholen Sie nun das Experiment für $n = 50.000$. Was können Sie beobachten?

b) Überzeugen Sie sich anhand desselben Experiments davon, dass sie den Mittelwert der Zufallszahlen auf den Wert m verschieben können, indem Sie m zu allen Zufallszahlen hinzuaddieren. Überzeugen Sie sich auch, dass die quadratische Abweichung um den Faktor s verändern können, indem Sie alle Zufallszahlen mit s multiplizieren.

c) Kommen wir noch einmal zum Torschussproblem zurück. Nehmen wir einmal an, dass sich die Störungen Δv in der Abschussgeschwindigkeit wie normalverteilte Zufallszahlen mit Mittelwert $v_0 = 13.6392 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und quadratischer Abweichung $\Delta v^0 = 0.28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ verhalten. Schreiben Sie nun ein Programm, das $n = 50000$ gestörte Abschussgeschwindigkeiten auf diese Art zieht. Berechnen Sie für alle diese Geschwindigkeiten v die Überflughöhe $H(v)$ und ermitteln Sie die relative Anzahl der Lattentreffer, d.h. den Anteil aller v , sodass $|H(v) - h_0| \leq 0.04$ gilt.

Lösung:

Siehe Code und angehängte Graphiken. Das Ergebnis bei (c) sollte etwa 0.05 betragen. *4 Punkte für Aufgabe a), etwa für das Erzeugen der Zahlen, die Berechnung von $m(x)$ und $s(x)$, die Schleife und die Graphik. 1 Punkt für Aufgabe b). 5 Punkte für Aufgabe c), etwa für das setzen der Konstanten, das Erzeugen der Geschwindigkeiten, die Auswertung von H , das Berechnen der Trefferzahl und die Ausgabe.*