

Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

8. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Lösung

Aufgabe 2 (*Spaltensummennorm, 7T*):

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnen wir die folgende Norm:

$$\|A\|_1 := \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

als Spaltensummennorm. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\|A\|_1$ die von der ℓ^1 -Norm (Aufgabe 1) induzierte Matrixnorm ist, und die Schreibweise damit gerechtfertigt ist. Achtung: Wir verwenden die gleiche Schreibweise für Matrizen und Vektoren, d.h. für eine Matrix bezeichnet $\|A\|_1$ die Spaltensummennorm, für einen Vektor steht $\|x\|_1$ für die ℓ^1 -Norm.

a) (*3T*) Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_1 = 1$ gilt, dass:

$$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1.$$

b) (*2T*) Sei für festes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die natürliche Zahl k so gewählt, dass $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$. Zeigen Sie, dass für den k -ten Einheitsvektor $e_k \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$\|Ae_k\|_1 = \|A\|_1.$$

Dabei ist e_k der Vektor, dessen k -ter Eintrag gleich 1 ist, alle übrigen Einträge sind gleich 0.

c) (*2T*) Folgern Sie aus a) und b), dass die Spaltensummennorm tatsächlich die von der ℓ^1 -Norm induzierte Matrixnorm ist.

Lösung

a) Man verwendet nacheinander die Dreiecksungleichung, die Definition der Spaltensummennorm und die Normierung von x :

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\
&\leq \|A\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| \\
&= \|A\|_1.
\end{aligned}$$

b) Wir rechnen nach und benutzen die Definition von e_k und die Wahl von k :

$$\begin{aligned}
\|Ae_k\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ae_k)_i| \\
&= \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \\
&= \|A\|_1.
\end{aligned}$$

c) Die Definition der induzierten Matrixnorm $\|A\|_M$ war:

$$\|A\|_M = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_1.$$

Aus Aufgabenteil a) folgt $\|A\|_M \leq \|A\|_1$. Andererseits liefert b) einen Vektor e_k mit $\|e_k\|_1 = 1$, sodass $\|Ae_k\|_1 = \|A\|_1$. Beides zusammen liefert $\|A\|_M = \|A\|_1$.

Aufgabe 3 (Ableiten, 5P):

In vielen Anwendungsproblemen müssen Ableitungen numerisch berechnet werden, da es keine geschlossene Form zur Berechnung der Ableitung gibt. Zur Approximation der Ableitung kann man den bekannten Differenzenquotienten

$$df(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

verwenden, da dieser im Grenzwert $h \rightarrow 0$ gegen $f'(x_0)$ konvergiert. Die Wirklichkeit sieht aber oft anders aus. Schreiben Sie zur Illustration ein Programm, welches die Ableitungen der Funktion $f(x) = \arctan(x)$ an den Stellen $x_0 = 0, 1, 10, 50, 100$ mit Hilfe des Differenzenquotienten zu berechnen versucht. Die analytische Formel für die Ableitung der Funktion f ist

$$f'(x_0) = \frac{1}{1 + x_0^2}.$$

Berechnen Sie für jedes x_0 den Differenzenquotienten $df(h)$ für $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-10}$. Plotten Sie den relativen Fehler

$$\frac{|df(h) - f'(x_0)|}{|f'(x_0)|}$$

in einen logarithmischen Plot (Befehl **loglog**). Plotten Sie die Fehlerkurven für alle Werte von x_0 in eine Graphik. Was passiert und warum?

Lösung

Siehe Code und angehängte Graphik. Man beobachtet, dass nur für $x_0 = 0$ die Fehlerkurven tatsächlich konvergieren. Für alle anderen Werte tritt Auslöschung auf. Wenn sich die Auswertungen von $\arctan(x_0 + h)$ und $\arctan(x_0)$ nur noch geringfügig unterscheiden, tritt im Zähler des Differenzenquotienten Auslöschung auf, die durch die Division verstärkt wird. Die Ergebnisse werden ungenauer. Das tritt umso früher auf, je flacher die Kurve bei x_0 verläuft. (4 Punkte für den Code, 1 Punkt für die Begründung).