

Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

4. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Lösung

Aufgabe 1 (*Kondition I, 3T*):

a) Berechnen Sie die absolute und relative Kondition der Funktion $f : f(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

$$\begin{aligned}\kappa_{abs}(x) &= |f'(x)| \\ &= e^x \\ \kappa_{rel}(x) &= \frac{|x|}{|f(x)|} \kappa_{abs} \\ &= |x|.\end{aligned}$$

(je ein halber Punkt).

b) Gesucht sei die Lösung x der folgenden Gleichung:

$$mx + n = 0.$$

Berechnen Sie die absolute Kondition der Lösung x in Bezug auf Störungen in m , bei festem n . Veranschaulichen Sie das Ergebnis in einer Zeichnung.

Lösung

$$\begin{aligned}x(m) &= -\frac{n}{m} \\ \kappa_{abs}(m) &= \frac{n}{m^2}.\end{aligned}$$

Die Zeichnung sollte den “schleifenden Schnitt” einer Gerade mit der x -Achse bei kleinem m zeigen. (je ein Punkt für die Lösung und die Zeichnung).

Aufgabe 2 (Kondition II,):

a) Gegeben sei die Funktion f für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y > 0$:

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Für festes y definieren wir $f_y(x) := f(x, y)$. Bestimmen Sie die absolute Kondition von f_y als Funktion von x . Für welche Werte von x ist die absolute Kondition maximal und was ist der maximale Wert?

Lösung

Durch Berechnung der Ableitung

$$f'_y(x) = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

erhalten wir die absolute Kondition

$$\kappa_{abs}(x) = \frac{|x|y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Die zweite Ableitung f''_y ist

$$f''_y(x) = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3x^2y}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Berechnung der Nullstellen der führt auf

$$x_{1,2} = \pm \frac{y}{\sqrt{2}}$$

und die Extremwerte

$$\begin{aligned} f'_y(x_{1,2}) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}(\frac{3}{2})^{3/2}y} \\ \kappa_{abs}(x_{1,2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}(\frac{3}{2})^{3/2}y}. \end{aligned}$$

Für $y \rightarrow 0$ hat die absolute Kondition also zwei symmetrische, immer größer werdende Maxima, die immer näher ab $x = 0$ heranrücken. (*je ein Punkt für die richtige absolute Kondition und für die richtige Bestimmung der Extremwerte*).

b) In der Analysis werden Sie bald folgende Darstellung der Cosinus-Funktion lernen:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Erklären Sie mit Hilfe der obigen Darstellung, warum das Newton-Verfahren in Aufgabe 3b) vom letzten Übungsblatt frühzeitig stoppte.

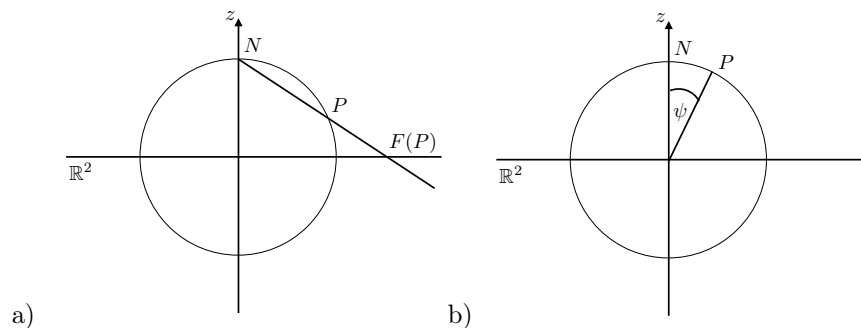


Figure 0.1: Stereographische Projektion und Definition des Polarwinkels ψ .

Lösung

Aus der obigen Darstellung folgt

$$\cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Für x -Werte im Bereich 10^{-8} oder kleiner ist der führende Term bereits kleiner als die Maschinengenauigkeit und kann daher leicht zu 0 abgerundet werden. Das ist genau was passiert, die Funktion wird zu 0 ausgewertet und die Iteration stoppt. (1 Punkt).

Aufgabe 3 (Weltkarte, 8P):

Wir betrachten die Sphäre im dreidimensionalen Raum, also die Menge

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

die man sich als vereinfachtes Modell der Erdkugel vorstellen kann. Wie bildet man die Sphäre auf eine Ebene ab? Ein einfaches (obgleich wenig überzeugendes) Verfahren ist die **stereographische Projektion**. Dabei lässt man einen Punkt der Sphäre aus, z.B. den Nordpol $N = (0, 0, 1)$. Jeden anderen Punkt P auf der S^2 bildet man auf die $x-y$ -Ebene ab, indem man die Verbindungsgerade durch P und N bildet und deren Schnittpunkt mit der $x-y$ -Ebene bestimmt, siehe Abbildung 0.1a). So erhält man eine Funktion $F : S^2 \setminus \{N\} \mapsto \mathbb{R}^2$, die sich in Koordinaten folgendermaßen schreibt:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Ihre Aufgabe: Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die einen Breitenkreis mittels stereographischer Projektion auf die Ebene abbildet und zeichnet. Im Einzelnen:

1. Die Funktion soll als Eingabe den Winkel ψ zwischen der Nord-Süd-Achse und dem Breitenkreis erhalten, siehe Abbildung 0.1b). Dabei vereinbaren wir, dass $\psi = 0$ dem Nordpol und $\psi = \pi$ dem Südpol entspricht.
2. Berechnen Sie die z -Koordinate des Breitenkreises auf zwei verschiedenen Wegen: $z_1 = \cos(\psi)$ und $z_2 = \frac{\sin(\psi)}{\tan(\psi)}$. Eigentlich sollten z_1 und z_2 natürlich gleich sein. Führen Sie alle folgenden Schritte für z_1 und z_2 aus.
3. Berechnen Sie den Radius r_z des Breitenkreises.
4. Parametrisieren Sie die x - und y -Koordinaten des Breitenkreises mit Hilfe von r_z und eines zweiten Winkels $\phi \in [0, 2\pi)$. Beachten Sie: Der Einheitskreis in der Ebene kann mit Hilfe des Winkels $\phi \in [0, 2\pi)$ durch

$$\begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

5. Stellen Sie nun eine $3 \times N$ -Matrix aus Punkten auf dem Breitenkreis auf. Jede Spalte der Matrix enthält die Koordinaten eines Punktes auf dem Kreis, die Anzahl N der Punkte können Sie bestimmen.
6. Bilden Sie diese Punkte mit Hilfe der Abbildung F auf die Ebene ab.
7. Zeichnen Sie die beiden entstandenen Punktmengen mit Hilfe eines Scatter-Plots (Befehl **scatter**) in dieselbe Graphik.

Testen Sie schließlich die Funktion für $\psi = \frac{2\pi}{10}$ und $\psi = \frac{2\pi}{10^8}$. Erklären Sie das Verhalten im zweiten Beispiel.

Lösung

Siehe den angehängten Code und die Graphiken. Die abweichenden Kreise für das zweite Beispiel entstehen durch Auslöschung. Die Werte von z_1 und z_2 sind nicht vollkommen gleich. Bei der Berechnung $1 - z_i$ in der Auswertung von F wird eine Subtraktion von fast gleich großen Zahlen durchgeführt, die den kleinen Rundungsfehler zwischen z_1 und z_2 massiv verstärkt. Die folgende Division macht den großen relativen Fehler zwischen $1 - z_1$ und $1 - z_2$ erst richtig sichtbar.

Je 1 Punkt für die Berechnung der z_i , die Berechnung der Radien, die Parametrisierung der x - und y -Koordinaten, das Aufstellen der Punkte Matrix, die Anwendung der Projektion und die Darstellung des Ergebnisses. 2 Punkte für die Begründung.