

Prof. Dr. Frank Noé  
Dr. Christoph Wehmeyer  
Tutoren:  
Katharina Colditz; Anna Dittus;  
Felix Mann; Christopher Pütz

## 9. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Lösung

### Aufgabe 1 (*Singuläre Matrizen, 3T*):

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär.

a) (1T) Zeigen Sie, dass für beliebiges  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , folgende Abschätzung gilt:

$$\frac{\|A - B\|}{\|A\|} \geq \frac{\|(A - B)x\|}{\|A\|\|x\|}.$$

b) (1T) Sei nun  $B$  singulär. Zeigen Sie, dass es einen Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  gibt, sodass

$$\frac{\|(A - B)x\|}{\|A\|\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|Ax\|}{\|A\|\|A^{-1}\|\|x\|}.$$

c) (1T) Folgern Sie nun, dass für singuläres  $B$  die Abschätzung

$$\frac{\|A - B\|}{\|A\|} \geq \frac{1}{\kappa(A)}$$

gilt.

### Lösung

a) Man erweitert mit  $\|x\|$  und wendet die Submultiplikativität der Matrixnorm im Zähler an.

b) Da  $B$  singulär ist, gibt es einen Vektor  $\mathbf{x}$ , sodass  $B\mathbf{x} = 0$ . Das verwendet man im Zähler und erweitert mit  $\|A^{-1}\|$ .

c) Man verwendet auf der rechten Seite von b) noch einmal die Submultiplikativität, sodass sich  $A^{-1}A$  aufhebt. Im Nenner benutzt man die Definition von  $\kappa(A)$ .

## Aufgabe 2 (Kondition einer Matrix):

Sei  $A$  eine reguläre  $n \times n$ -Matrix.

a) (1T) Sei  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{x}_0\| = 1$  so gewählt, dass

$$\|A\mathbf{x}_0\| = \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|,$$

und bezeichne dieses Minimum mit  $\sigma := \|A\mathbf{x}_0\|$ . Definiere  $\mathbf{y}_0 := \frac{1}{\sigma} A\mathbf{x}_0$ . Zeigen Sie, dass  $\|\mathbf{y}_0\| = 1$  und  $\|A^{-1}\mathbf{y}_0\| = \frac{1}{\sigma}$ .

b) (4T) Zeigen Sie, dass es kein  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{x}\| = 1$  geben kann, sodass

$$\|A^{-1}\mathbf{x}\| > \frac{1}{\sigma}$$

gilt.

c) (2T) Folgern Sie, dass die Kondition der Matrix  $A$  durch

$$\kappa(A) = \frac{\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|}{\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|}$$

berechnet werden kann.

## Lösung

a) Rechnet man direkt nach.

b) Nehme an, es gäbe ein  $\mathbf{x}_1$ ,  $\|\mathbf{x}_1\| = 1$ , sodass  $\|A^{-1}\mathbf{x}_1\| > \frac{1}{\sigma}$  gilt. Definiere wieder  $\sigma_2 := \|A^{-1}\mathbf{x}_1\|$  und  $\mathbf{y}_1 := \frac{1}{\sigma_2} A^{-1}\mathbf{x}_1$ . Dann gilt  $\|\mathbf{y}_1\| = 1$  und

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{y}_1\| &= \frac{1}{\sigma_2} \|A\mathbf{x}_1\| \\ &= \frac{1}{\sigma_2} \\ &< \sigma. \end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von  $\sigma$ .

c) Aus a) und b) erhalten wir, dass  $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|}$ . Zusammen mit der Formel  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  ist dies die Behauptung.

## Aufgabe 3 (Hilbert-Matrix, 7P):

Das Paradebeispiel einer schlecht konditionierten Matrix ist die Hilbert-Matrix  $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit den Einträgen

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

In Matlab können Sie die Hilbert-Matrix direkt durch den Befehl **hilb(n)** erzeugen. Schreiben Sie ein Programm, dass für  $n = 1, 2, \dots, 15$  die Hilbert-Matrix  $H_n$  und die rechte Seite  $\mathbf{b}_n$  erzeugt, wobei  $\mathbf{b}_n$  der erste Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^n$  ist, also derjenige Vektor, dessen erster Eintrag Eins ist und alle anderen Einträge gleich Null sind. Danach sollen die linearen Systeme

$$\begin{aligned} H_n \mathbf{x} &= \mathbf{b}_n \\ \sqrt{2} H_n \mathbf{x} &= \sqrt{2} \mathbf{b}_n \end{aligned}$$

nacheinander gelöst werden. Dazu können Sie den Backslash-Operator `\` verwenden. Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler in der 2-Norm zwischen den beiden Lösungen und plotten Sie diesen über  $n$ . Berechnen Sie auch jeweils die Konditionszahl  $\kappa(H_n)$  mit Hilfe von **cond** und plotten Sie auch die Kondition über  $n$ . Was geschieht und warum?

### Lösung

Siehe Code und Graphiken. Man sieht, dass die Konditionszahl der Matrix rasant anwächst. Da die Berechnung von  $\sqrt{2}H_n$  nicht exakt ist, wird beim zweiten System ein Eingabefehler eingeführt, der durch die Lösung des Gleichungssystems erheblich verstärkt werden kann. Bei  $n = 12$  erreicht die Konditionszahl das Inverse der Maschinengenauigkeit, damit kann der Eingabefehler auf die Größenordnung 1 verstärkt werden, die Ergebnisse werden bedeutungslos. Genau das geschieht auch. (5 Punkte für den Code, 2 Punkte für die Auswertung).