

Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

6. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Lösung

Aufgabe 1 (*Stabilität, 5T*):

a) (*3T*) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \log(\sqrt{x})$, $x > 0$. Bestimmen Sie die relative Stabilität des Algorithmus, welcher die Funktion f in genau dieser Form auswertet. Geben Sie auch die Teilfunktionen an.

b) (*2T*) Geben Sie einen besseren Algorithmus zur Auswertung von f an, dessen Stabilität unabhängig von x und beschränkt ist. Der Algorithmus soll ebenfalls nur zwei Teilfunktionen verwenden.

Lösung

a) Es gilt $f(x) = g_2 \circ g_1(x)$ mit $g_1(y) = \sqrt{y}$, $g_2(y) = \log(y)$. Die Kondition von g_2 ist

$$\begin{aligned}\kappa_2(y) &= \frac{y}{\log(y)} \frac{1}{y} \\ &= \frac{1}{\log y},\end{aligned}$$

und damit erhalten wir für die relative Stabilität:

$$\begin{aligned}\sigma_f(x) &= 1 + \kappa_2(\sqrt{x}) \\ &= 1 + \frac{1}{\log(\sqrt{x})}.\end{aligned}$$

1 Punkt für die Teilfunktionen, 2 Punkte für die Rechnung.

b) Der einfachste Weg ist $f(x) = h(x) = \frac{1}{2} \log(x) = h_2 \circ h_1(x)$ mit $h_1(y) = \log(y)$, $h_2(y) = \frac{1}{2}y$. Es gilt $\kappa_2 = 1$ und damit

$$\begin{aligned}\sigma_h(x) &= 1 + \kappa_2(x) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Je ein Punkt für den Algorithmus und für die Begründung.

Aufgabe 2 (Fixpunkt, 6P + 5T):

a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion **FixedPoint**, die eine reelle Zahl x_0 und eine positive Zahl $\text{tol} > 0$ als Eingaben bekommt. Die Funktion soll die Abbildung $f(x) = \cos(x)$ wiederholt auf den Wert x_0 anwenden. Beginnend mit x_0 wird also die nächste Iteration durch

$$x_{k+1} = \cos(x_k)$$

berechnet. Dies soll so lange geschehen, bis sich zwei aufeinander folgende Iterationsschritte um weniger als tol unterscheiden. Wählen Sie nun $N = 500$ zufällige Startpunkte x_0 aus dem Intervall $I = [\cos(1), \cos(\cos(1))] \approx [0.5403, 0.8576]$, und wenden Sie Ihre Funktion auf diese Werte an. Setzen Sie dabei $\text{tol} = 10^{-8}$. Was beobachten Sie? Hinweis: Schauen Sie sich die Funktion **rand** an.

b) Begründen Sie, dass die Folge der Iterierten x_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ aus Aufgabenteil a) stets im Intervall I liegt.

c) Berechnen Sie die relative Kondition κ_{rel} der Funktion f und zeigen Sie, dass κ_{rel} auf dem Intervall I echt kleiner als Eins ist.

d) (*Freiwillig, +3T*) Wir bezeichnen mit $f^n(x_0) = x_n$ die Abbildung, die $x_0 \in I$ auf den n -ten Iterationsschritt, beginnend mit x_0 , abbildet. Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabenteil c), um zu zeigen, dass die relative Stabilität der Funktion f^n beschränkt bleibt.

Lösung

a) Siehe Code und Graphik. Die Fixpunktiteration konvergiert immer gegen den Wert $x^* \approx 0.7391$. *Drei Punkte für die Funktion, etwa für die Initialisierung, das Update und die richtige Abbruch-Bedingung. Drei Punkte für das Skript, für die Settings, das Erzeugen der Zufallszahlen und für Anwendung der Funktion und die Darstellung.*

b) Die Funktion f ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton fallend, daher reicht es, sich die Anwendung von f auf die Randwerte anzusehen (das muss nicht mit der Ableitung begründet werden, man kann auch auf die Schule verweisen, eine Skizze machen oder irgendwie anders sinnvoll begründen, ebenso bei Aufgabenteil c)). Dementsprechend bildet die Funktion f auf das Intervall $I_2 = [\cos(\cos(\cos(1))), \cos(\cos(1))] \approx [0.6543, 0.8576]$ ab, welches in I enthalten ist. (*2 Punkte*).

c) Für die relative Kondition der Funktion f im Punkt $x \in I$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\kappa_{rel}^f(x) &= \frac{x}{\cos(x)} | -\sin x | \\ &= x \cdot \tan(x).\end{aligned}$$

Wieder sehen wir, dass $\kappa_{rel}^f(x)$ monoton wachsend auf I ist, wir sehen uns also den rechten Randwert $b = \cos(\cos(1))$ an:

$$\begin{aligned}\kappa_{rel}^f(b) &= b \cdot \tan(b) \\ &\approx 0.9912 \\ &< 1.\end{aligned}$$

(3 Punkte).

d) Die Funktion f^n ist die n -fache Hintereinanderschaltung der Funktion f . Daher können wir die Formel für die relative Stabilität benutzen. Außerdem können wir noch Teil c) benutzen, wobei wir die dort ermittelte Schranke mit $q := \kappa_{rel}^f(b)$ bezeichnen:

$$\begin{aligned}\sigma_{rel} &\leq \sum_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n \kappa_{rel}^f(x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n q \\ &= \sum_{j=1}^n q^{n-j}.\end{aligned}$$

Umsortieren führt auf die geometrische Reihe:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n q^{n-j} &= \sum_{j=0}^{n-1} q^j \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q}.\end{aligned}$$

Dies bleibt wegen $q < 1$ beschränkt und konvergiert sogar für $n \rightarrow \infty$ gegen $\frac{1}{1-q}$.