

Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

3. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Lösung

Aufgabe 1 (*Gleitkommadarstellung, 3T*):

a) Geben Sie für folgende Zahlen $x \in \mathbb{R}$ ihre Darstellung \tilde{x} in der angegebenen Gleitkommamenge $\mathbb{G}(l, q)$ an:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1342.02 \quad , \quad \mathbb{G}(10, 5) \\x_2 &= \frac{1}{3} \quad , \quad \mathbb{G}(2, 4)\end{aligned}$$

Lösung

$$\tilde{x}_1 = 0.13420 \cdot 10^4$$

Für x_2 kennen wir die Binärdarstellung: $x_2 = 0.010101 \dots$ Damit erhalten wir:

$$\tilde{x}_2 = 0.1011 \cdot 2^{-1}.$$

(je 1/2 Punkt pro Antwort).

b) Geben Sie $x, y, z \in \mathbb{G}(10, 3)$ an, für die das Distributivgesetz verletzt ist.

Lösung

(2 Punkte für ein korrektes Gegenbeispiel) Ein Beispiel wäre $x = 30.5$, $y = 40.5$, $z = 5$, die alle in $\mathbb{G}(10, 3)$ exakt darstellbar sind. Es gilt:

$$\begin{aligned}(x \tilde{+} y) \tilde{\cdot} z &= (30.5 \tilde{+} 40.5) \tilde{\cdot} 5 \\&= 71 \tilde{\cdot} 5 \\&= 355 \\x \tilde{\cdot} z \tilde{+} y \tilde{\cdot} z &= 30.5 \tilde{\cdot} 5 \tilde{+} 40.5 \tilde{\cdot} 5 \\&= 153 \tilde{+} 203 \\&= 356.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Maschinengenauigkeit, 6T):

a) Sei $q \in \mathbb{N}$ gerade. Beweisen Sie:

$$\text{eps}(q, l) = \min\{x \in \mathbb{G}(q, l), x > 0 : \text{rd}(1+x) > 1\}.$$

Lösung:

Da q gerade ist, ist auch $\frac{1}{2}q \in \mathbb{N}$, sei daher $b = \frac{1}{2}q$. Damit schreibt sich eps als:

$$\begin{aligned}\text{eps} &= \frac{1}{2}qq^{-l} \\ &= bq^{-l}\end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir für $\text{eps} + 1$ die Darstellung:

$$\begin{aligned}\text{eps} + 1 &= 1 + bq^{-l} \\ &= 0.10 \dots 0b \cdot q^1,\end{aligned}$$

dabei steht b an der $l+1$ -ten Nachkommastelle. Anwendung der Rundungsvorschrift auf l Stellen liefert:

$$\begin{aligned}\text{rd}(\text{eps} + 1) &= 0.10 \dots 1 \cdot q^1 \\ &= 1 + q^{-l+1} \\ &> 1.\end{aligned}$$

Also ist eps in der oben angegebenen Menge enthalten. Sei nun $0 < x < \text{eps}$ vorgegeben. Dann hat x die Darstellung:

$$x = 0.b_1b_2 \dots \cdot q^{-l+1},$$

wobei $b_1 < b$ gilt. Damit erhalten wir:

$$1 + x = 0.10 \dots 0b_1b_2 \cdot q^1,$$

wobei b_1 an der $l+1$ -ten Nachkommastelle steht. Anwendung der Rundungsvorschrift auf l Stellen liefert:

$$\begin{aligned}\text{rd}(1+x) &= 0.10 \dots 0 \cdot q^1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

(z.B. je 2 Punkte für die Aussagen, dass eps in der Menge liegt, und dass jedes kleinere x nicht darin liegt).

b) Die Bedeutung der Maschinengenauigkeit liegt nicht darin, dass wir keine kleineren Zahlen als $\text{eps}(q, l)$ darstellen können, sondern dass wir Rechenoperationen, die auf zu kleinen Zahlen ausgeführt werden, nicht unbedingt trauen können. Das gilt insbesondere, wenn wir kompliziertere Funktionen auswerten, worauf wir in den nächsten Vorlesungen genauer eingehen werden. Betrachten sie die Darstellung $\mathbb{G}(10, 4)$ und geben Sie zwei darstellbare reelle Zahlen $x_1, x_2 < \text{eps}(10, 4)$ an, sodass die Auswertung der Funktion $f(x) = \sqrt{x} + 10^{-2}$ in $\mathbb{G}(10, 4)$ für x_1 korrekt ist und für x_2 nicht.

Lösung

Beispielweise können wir $x_1 = 10^{-4}$ und $x_2 = 10^{-14}$, nehmen, die beide einfach darstellbar sind und kleiner als $\text{eps}(10, 4) = 5 \cdot 10^{-4}$ sind. Es gilt in $\mathbb{G}(10, 4)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sqrt{x_1} + 10^{-2} \\ &= 10^{-2} + 10^{-2} \\ &= 2 \cdot 10^{-2}. \\ f(x_2) &= \sqrt{x_2} + 10^{-2} \\ &= 10^{-7} + 10^{-2} \\ &= 10^{-2}. \end{aligned}$$

Das erste Ergebnis ist exakt, das zweite nicht. *(je ein Punkt pro Beispiel).*

Aufgabe 3 (Sichtbare Auswirkungen, 7P):

a) Wir betrachten die Funktion $f : f(x) = \cos(x) - 1$. Plotten Sie die Funktion f für $x \in [10^{-8}, 10^{-3}]$ mit einer hohen Auflösung. Wandeln Sie nun den Eingabevektor x in Single Precision um und plotten Sie die Auswertung der Funktion f in dieselbe Graphik. Was passiert?

Hinweis: Nützliche Matlab-Funktionen für diese Übung sind **single**, **plot** und **hold all**.

Lösung

Siehe Code und angehängte Graphik. *(jeweils 1 Punkt für die Funktionsauswertungen, die graphische Darstellung und die Beschreibung des Ergebnisses.)*

b) Ein vielfach verwendete Methode zur Bestimmung von Nullstellen einer gegebenen Funktion f ist das **Newton-Verfahren**, welches Sie noch in der Analysis kennenlernen werden. Ausgehend von einem Startwert x_0 wendet man iterativ die folgende Vorschrift zur Bestimmung des nächsten Wertes x_{k+1} aus dem aktuellen Wert x_k an:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Wenn man den Startwert x_0 gut gewählt hat, kann man hoffen, dass die Folge der x_k gegen eine echte Nullstelle der Funktion f konvergiert. Schreiben Sie eine Funktion, die das Newton-Verfahren für die Funktion f aus Aufgabe a) ausführt. Die Funktion soll den Startwert x_0 und die Anzahl auszuführender Schritte k_{max} übergeben bekommen, und am Ende einen Vektor mit allen Werten x_k zurückgeben. Testen Sie die Funktion mit $x_0 = 10^{-6}$, $k_{max} = 100$ und plotten Sie die Folge der Iterierten. Was passiert und warum?

Lösung

Siehe Code und angehängte Graphik. Die Iteration bleibt konstant ab einem Wert von $\approx 1.04 \cdot 10^{-8}$. Ab diesem Wert wird f zu 0 ausgewertet und die Iteration bleibt konstant. *(2 Punkte für die Funktion, einer für die Graphik und 1 Punkt für die Beschreibung und Begründung).*