

Prof. Dr. Frank Noé
 Dr. Christoph Wehmeyer
 Tutoren:
 Katharina Colditz; Anna Dittus;
 Felix Mann; Christopher Pütz

2. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik I

Lösung

Aufgabe 1 (*Brüche im Binärsystem, 2T*):

Sei $q \in \mathbb{Q}$, $0 \leq q < 1$ eine rationale Zahl zwischen 0 und 1.

a) Wir betrachten das folgende Verfahren zur Berechnung der Binärdarstellung q :

1. Initialisierung: Setze $p = q$ und setze eine Zählvariable $i = 1$.
2. Berechne $r = 2p$.
 - (a) Wenn $r \geq 1$, setze $q_i = 1$ und $p = r - 1$.
 - (b) Andernfalls, setze $q_i = 0$ und lasse p unverändert.
3. Setze $i = i + 1$ und wiederhole Schritt 2, bis sich p wiederholt oder $p = 0$.

Berechnen Sie mit diesem Verfahren die Binärdarstellung von $q = \frac{1}{3}$ und $q = \frac{1}{10}$.

Lösung

Mit der folgenden Tabelle lässt sich das Verfahren einfach umsetzen:

i	r	p	q_i
0		$\frac{1}{3}$	
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Dies liefert $q = 0.\overline{01}_2$. Analog ermittelt man für $q = \frac{1}{10} = 0.\overline{00011}_2$. (je ein Punkt pro Umrechnung)

b) (*Freiwillig, 2 Zusatzpunkte*) Begründen Sie, dass dieses Verfahren korrekt ist!

Lösung

Wir müssen zeigen, dass dieses Verfahren das uns bekannte Verfahren zur Berechnung der Binärdarstellung umsetzt. Dieses lief ja folgendermaßen ab:

1. Setze $p = q$ und $i = 1$. Wiederhole für $k = 1, 2, \dots$:

2. Ermittle den ganzzahligen Anteil n und den Rest r beim Teilen von p durch 2^{-k} , also $p = n2^{-k} + r$.
 - (a) Schreibe n an die Stelle i und erhöhe i um 1.
 - (b) Setze $p = r$.
3. Beende, wenn sich p wiederholt oder $r = 0$.

Wir argumentieren nun in zwei Schritten: Bezeichnen wir das initiale p mit p_1 und nehmen wir an, dass wir vom Start an k Schritte brauchen, bis wir zum ersten Mal eine 1 für q_i eintragen. In diesem Fall macht der Algorithmus aus der Aufgabe genau dasselbe wie das allgemeine Verfahren. Wir bilden im ersten Schritt $r_2 = 2p_1 = \frac{p_1}{1/2}$. Da das Ergebnis kleiner als 1 ist, ist der ganzzahlige Anteil von p_1 zu $\frac{1}{2}$ gleich Null, diesen tragen wir ein. Der Rest wäre einfach gleich p_1 , das wir nun durch 2^{-2} teilen müssten. Anstatt das zu machen, nehmen wir einfach $r_2 = 2p_1$ noch einmal mal 2, usw. Nach k Schritten sind wir also bei $r_k = 2^k p_1$ angelangt, und stellen fest, dass der ganzzahlige Anteil von p_1 zu 2^{-k} gleich 1 ist, das tragen wir ein. Welchen Rest bilden wir nun? Wir bilden $p_k = r_k - 1 = 2^k(p_1 - 2^{-k})$. Das ist aber 2^k mal der Rest von p_1 beim Teilen durch 2^{-k} , mit dem wir im gewöhnlichen Verfahren weiterrechnen müssten. Da wir ihn im darauf folgenden Schritt wieder mal 2 nehmen, schauen wir uns in Wahrheit an, was beim Teilen des letzten Restes $p_1 - 2^{-k}$ durch $2^{-(k+1)}$ passiert. Das entspricht wiederum dem normalen Verfahren. Damit haben wir gezeigt, dass der Algorithmus in allen Fällen das richtige tut.

Aufgabe 2 (*Endliche q -adische Brüche, 4T*):

Beweisen Sie: Die Zahl $\frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$ besitzt genau dann eine endliche Darstellung zur Basis q , wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass q^n durch k teilbar ist.

Lösung

Die Teilbarkeit von q^n durch k für ein $n \in \mathbb{N}$ ist gleichbedeutend damit, dass es $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$k \cdot m = q^n.$$

Fügen wir die q -adische Darstellung von $m = \sum_{i=0}^r m_i q^i$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
k \sum_{i=0}^r m_i q^i &= q^n \\
q^{-n} \sum_{i=0}^r m_i q^i &= \frac{1}{k} \\
\sum_{i=0}^r m_i q^{i-n} &= \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte endliche Darstellung von $\frac{1}{k}$ zur Basis q . Umgekehrt erhalten wir aus der Existenz der q -adische Darstellung von $\frac{1}{k}$, dass:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-n}^r m_i q^i &= \frac{1}{k} \\
q^{-n} \sum_{i=0}^{r+n} m_i q^i &= \frac{1}{k} \\
k \sum_{i=0}^{r+n} m_i q^i &= q^n \\
km &= q^n,
\end{aligned}$$

und somit die geforderte Teilbarkeitsrelation (je 2 Punkte für die beiden Richtungen).

Aufgabe 3 (Rechnen im Zweierkomplement, (3+6)P, 2T):

a) Siehe Code (je ein Punkt für die richtige Funktionsdefinition, die Fehlermeldung und die richtige Anpassung der Schleife).

b) Die Zulässigkeit von n bedeutet, dass $-2^{N-1} \leq n < 0$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Zweierkomplemente der Zahlen -2^{N-1} bis -1 durch die positiven Zahlen von 2^{N-1} bis $2^N - 1$ aufsteigend codiert werden. Damit können wir die benötigte positive Zahl berechnen, indem wir den Abstand von n zu -2^{N-1} zu 2^{N-1} hinzuaddieren. Das ergibt für die Zweierkomplementdarstellung

$$\begin{aligned}
p &= 2^{N-1} + (n - (-2^{N-1})) \\
&= 2^{N-1} + n + 2^{N-1} \\
&= 2^N + n.
\end{aligned}$$

(je ein Punkt für Argument und Rechnung).

c) Siehe Code (1 Punkt für die Fehlerabfrage, 1 Punkt für die Umrechnung nach b), 1 Punkt fürs Erstellen der Binärdarstellung, 2 Punkte für die richtige Schleife, 1 Punkt für die richtige Ausgabe).