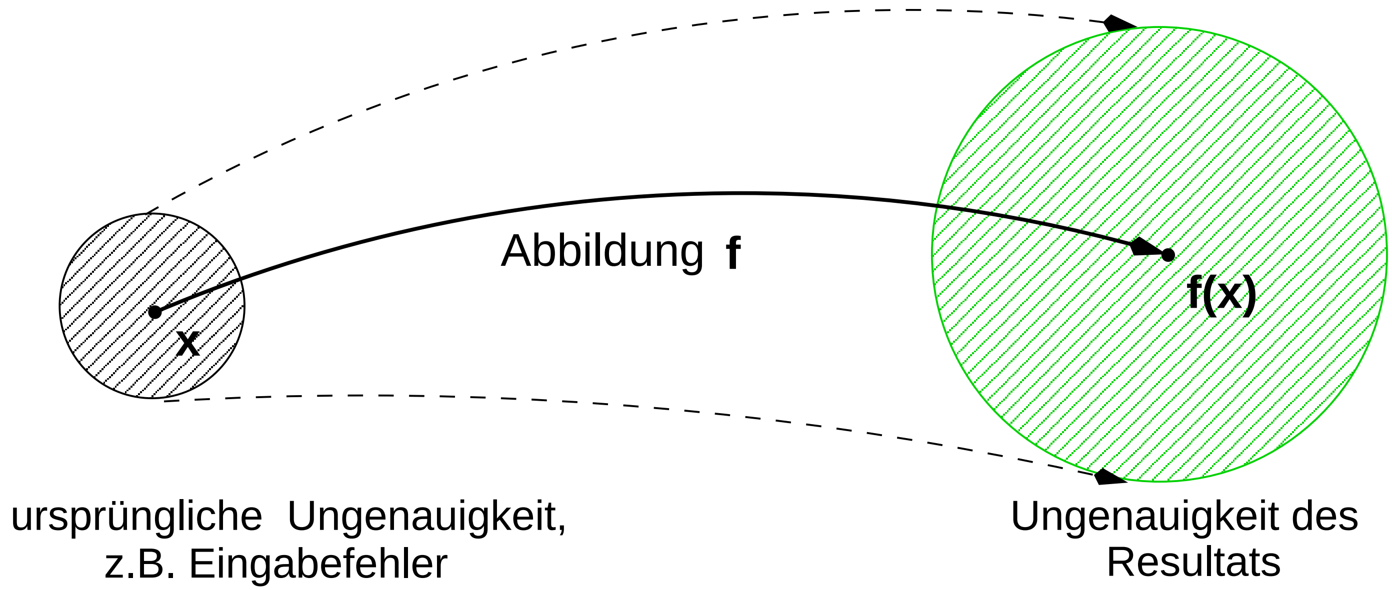
Relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}}(x_0) \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$$

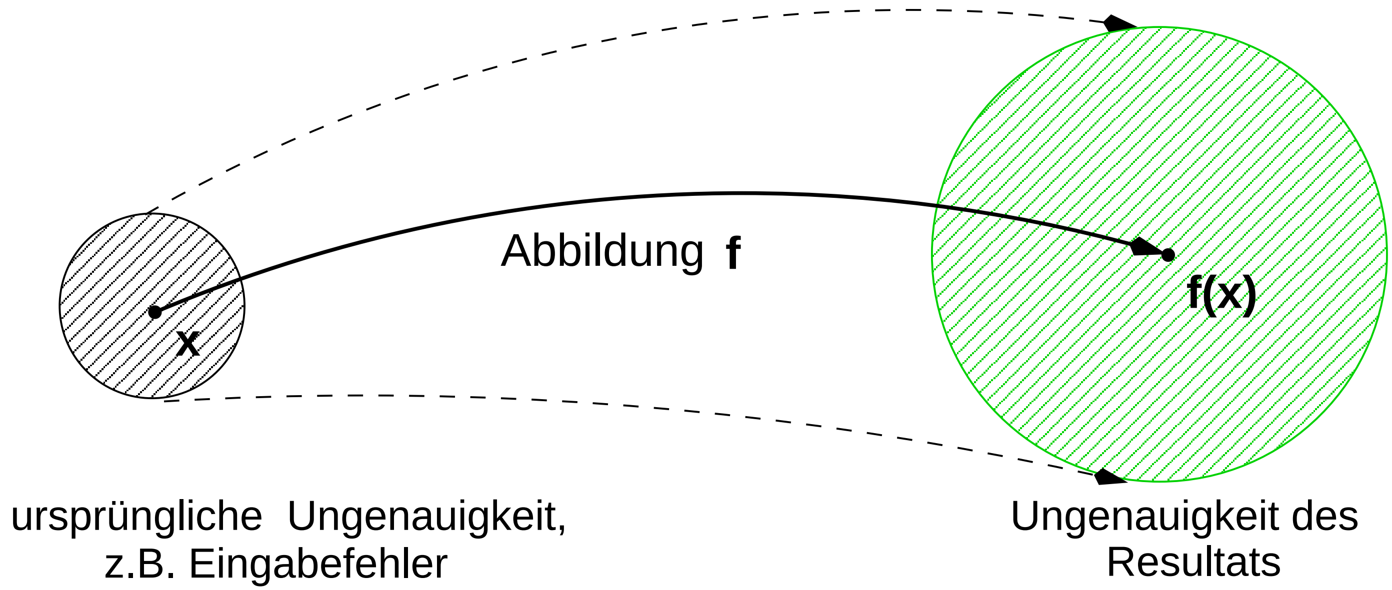
Kondition

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis:



Kondition

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis:



$$\boxed{\text{Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!}}$$

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Was ist hier schief gelaufen?

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0) , \qquad g_1(x_0) = ax_0 , \quad g_2(y) = y + b$$

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0) \ , \qquad g_1(x_0) = ax_0 \ , \quad g_2(y) = y + b$$

$$f(x_0) = ax_0 + b = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a} \ , \quad h_2(y) = ay$$

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0)\ , \qquad g_1(x_0) = ax_0\ , \quad g_2(y) = y + b$$

$$f(x_0) = ax_0 + b = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = h_2 \circ h_1(x_0)\ , \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}\ , \quad h_2(y) = ay$$

Welcher Algorithmus ist besser?

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0.

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0.

Realisierung im Rechner: Auswertungsfehler

$$\tilde{f}(x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0.

Realisierung im Rechner: Auswertungsfehler

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

Runden nach jeder Elementaroperation:

$$\tilde{g}_i(y) = (1 + \varepsilon_i) g_i(y), \quad |\varepsilon_i| \leq eps, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

Merksatz

$\boxed{\text{Verschiedene Algorithmen führen zu verschiedenen Ergebnissen}}$

...aber welcher Algorithmus ist besser?

Algorithmus A:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0) \ , \qquad g_1(x_0) = ax_0 \ , \quad g_2(y) = y + b$$

Algorithmus B:

$$f(x_0) = ax_0 + b = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a} \ , \quad h_2(y) = ay$$

Relative Stabilität: Auswirkung von Gleitkommarechnung

Bezeichnung: $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ gegeben. Wir setzen $\|\varepsilon\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\varepsilon_i|$.

Definition 7.4: Die relative Stabilität $\sigma_{\rm rel}$ des Algorithmus'

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \neq 0$$

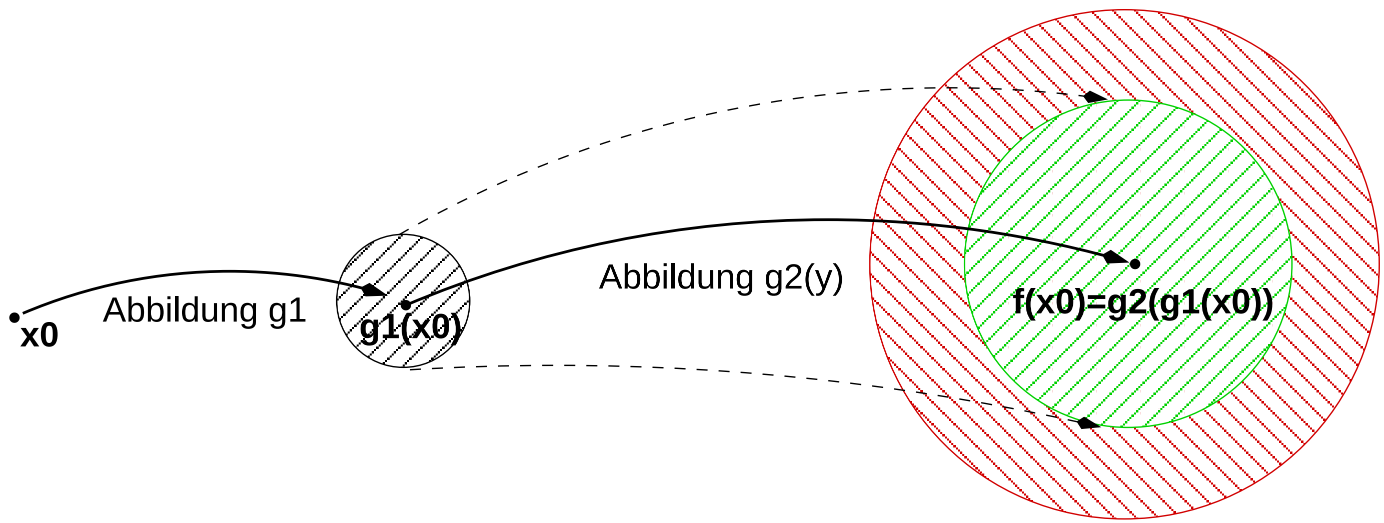
gegenüber Rundungsfehlern $\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1 + \varepsilon_i)$, $|\varepsilon_i| \leq eps$,
ist die kleinste Zahl $\sigma_{\rm rel}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\rm rel}\|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|) \ .$$

Liegt dies für keine reelle Zahl $\sigma_{\rm rel}$ vor, so wird $\sigma_{\rm rel} = \infty$ gesetzt.

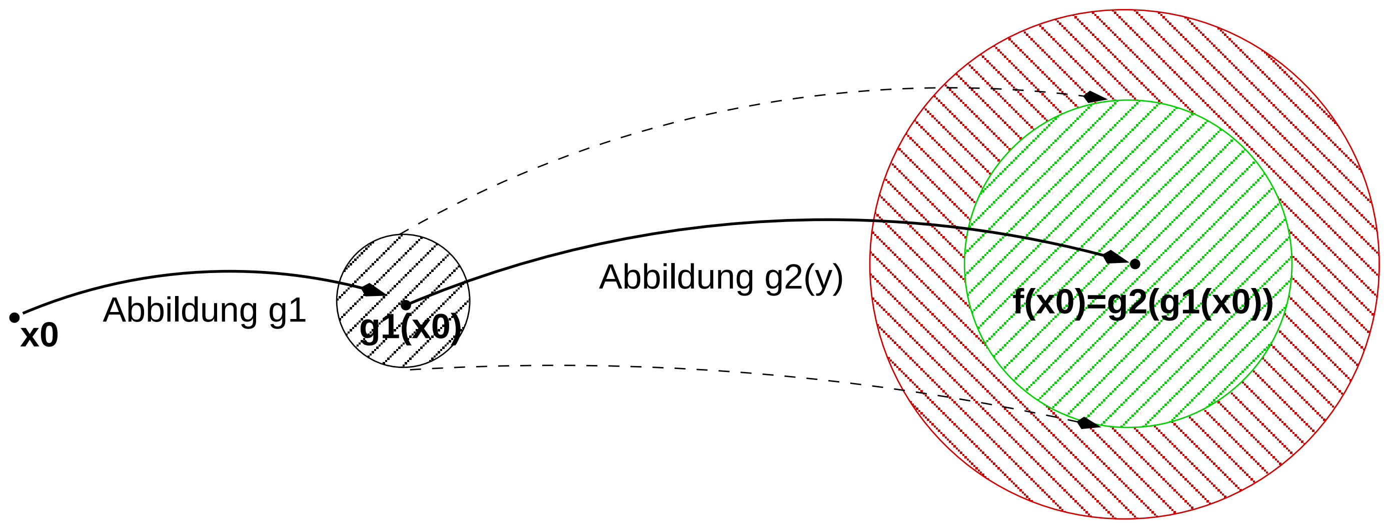
Stabilität

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis:



Stabilität

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis:



Die Stabilität ist eine Eigenschaft des Algorithmus!

...aber welcher Algorithmus ist besser?

Algorithmus A:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0) \; , \qquad g_1(x_0) = ax_0 \; , \quad g_2(y) = y + b$$

$$\boxed{\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} = 1 + \frac{|ax_0|}{|ax_0 + b|} \; ,}$$

Algorithmus B:

$$f(x_0) = ax_0 + b = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = h_2 \circ h_1(x_0) \; , \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a} \; , \quad h_2(y) = ay$$

$$\boxed{\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} = 2 \; .}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \tfrac{1}{2}(1 - y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) \quad = \quad \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\ &= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(1-(1+\varepsilon_1)\cos(2\pi)))}\right) \end{aligned}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(1-(1+\varepsilon_1)\cos(2\pi)))}\right) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(-\varepsilon_1))}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(1 - (1+\varepsilon_1)\cos(2\pi)))}\right) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(-\varepsilon_1))}\right)
\end{aligned}
$$

Nicht reell auswertbar für beliebig kleine $\varepsilon_1 > 0$: $\quad \sigma_{\text{rel}} = \infty$

Definition der Stabilität

Definition 7.4: Es sei $f(x_0) \neq 0$. Dann ist die relative Stabilität σ_{rel} von

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

gegenüber Störungen durch Rundungsfehler

$$\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1 + \varepsilon_i)$$

die kleinste Zahl σ_{rel} mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\mathrm{rel}} \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

für alle genügend kleinen Störungen ε.
Liegt dies für keine reelle Zahl σ_{rel} vor, so wird $\sigma_{\mathrm{rel}} = \infty$ gesetzt.

Gesamtfehler

Eingabefehler: $\dfrac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$ max. Rundungsfehler: $\|\varepsilon\|$

resultierender Gesamtfehler: $\dfrac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$

Satz 7.5: Es sei $x_0 \neq 0$ und $f(x_0) \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}}(x_0)\frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma_{\text{rel}}(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|)\ .$$

$\sigma_{\text{rel}}(\tilde{x}_0)$: Stabilität der Funktionsauswertung an der Stelle $\tilde{x}_0$.

$\kappa_{\text{rel}}(x_0)$: rel. Kondition der Auswertung von f an der Stelle x_0.

Faustregel

$$\boxed{\text{Gesamtfehler} = \kappa * \text{Eingabefehler} + \sigma * \text{Auswertungsfehler!}}$$

Stabilitätsabschätzungen: Grundrechenarten

Satz 7.9: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0)$, $h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)\ , \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h. Dann gilt jeweils

$$\begin{aligned}
f(x_0) = g(x_0) + h(x_0) \quad &: \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) \quad &: \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) \quad &: \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2\max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) = g(x_0)/h(x_0) \quad &: \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2\max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,
\end{aligned}$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 7.8: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1}, und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0) \ , \qquad y_i = g_i(y_{i-1}) \ , \quad i = 1, \dots, n \ , \qquad y_0 = x_0 \ .$$

Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i \ = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \dots \kappa_3(1 + \kappa_2) \dots)) \ .$$

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 7.8: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1}, und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0) \;, \qquad y_i = g_i(y_{i-1}) \;, \quad i = 1, \ldots, n \;, \qquad y_0 = x_0 \;.$$

Dann gilt

$$\sigma_{\mathrm{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i \;= 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots)) \;.$$

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen verschlechtern die Stabilität!

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\,, \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1 - y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1 - y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta,$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1 - y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1 - y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2,$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1 - y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \qquad \kappa_3 = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1+\sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2+\sqrt{2\delta}}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1-y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(1-y_1) = \delta/2, \qquad \kappa_3 = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1+\sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2+\sqrt{2\delta}}$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\quad \sigma_{\mathrm{rel}} \leq 1 + \kappa_3(1+\kappa_2)$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1 - y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \qquad \kappa_3 = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1+\sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2+\sqrt{2\delta}}$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2)$

beliebig große Schranke: $\quad 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \geq \frac{1-\delta}{6\sqrt{\delta}} \to \infty \quad$ for $\varepsilon \to 0$

1. Merksatz

$\boxed{\text{Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!}}$

1. Merksatz

$$\boxed{\text{Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!}}$$

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

1. Merksatz

$\boxed{\text{Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!}}$

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)\ , \qquad h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}\ , \quad h_2(y) = 1 + \sin(y)$

1. Merksatz

$$\boxed{\text{Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!}}$$

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)$, $\quad h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}$, $\quad h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_2$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)\ , \qquad h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}\ , \quad h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_2 = 1 + \frac{|y||\cos(y)|}{|1+\sin(y)|}$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)\ ,\qquad h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}\ ,\quad h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\mathrm{rel}} \le 1 + \kappa_2 = 1 + \frac{|y||\cos(y)|}{|1+\sin(y)|} \le 1 + \pi$

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901
```

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901

>> fh=1+sin(x0/2)

fh =
    1.000000053589793
```

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901

>> fh=1+sin(x0/2)

fh =
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g: $\sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901

>> fh=1+sin(x0/2)

fh =
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g: $\quad \sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1+\kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

```
>>  abs(fh-fg)/abs(fh*eps)
```

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901

>> fh=1+sin(x0/2)

fh =
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g: $\sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

```
>>  abs(fh-fg)/abs(fh*eps)

ans =
     6.174769669095370e+05
```

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 4.7: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1}, und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \dots \circ g_1(x_0) \;, \qquad y_i = g_i(y_{i-1}) \;, \quad i = 1, \dots, n \;, \qquad y_0 = x_0 \;.$$

Dann gilt

$$\sigma_{\mathrm{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i \;= 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \dots \kappa_3(1 + \kappa_2) \dots)) \;.$$

κ_1 geht nicht in die Abschätzung ein!

2. Merksatz

$$\boxed{\text{Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!}}$$

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216
```

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Was ist hier schiefgelaufen?

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \; , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \; , \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \; , \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \ , \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \ , \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

tatsächliche Fehlerverstärkung: $|8 - 393216|/(|8|eps) \approx 2.2 \cdot 10^{20}$