Computerorientierte Mathematik I

Kondition II

Wiederholung: Kondition der Grundrechenarten

Satz: Mit $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$, den Approximationen

$$\tilde{x} = x \cdot (1 + \epsilon_x)\,, \quad \tilde{y} = y \cdot (1 + \epsilon_y)\,,$$

und der Wahl $\epsilon = \max\{|\epsilon_x|, |\epsilon_y|\}$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{|(x+y)-(\tilde{x}+\tilde{y})|}{|x+y|} &\leq \epsilon \\
\frac{|(x\cdot y)-(\tilde{x}\cdot\tilde{y})|}{|x\cdot y|} &\leq 2\epsilon \\
\frac{|(x/y)-(\tilde{x}/\tilde{y})|}{|x/y|} &\leq 2\epsilon \\
\frac{|(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})|}{|x-y|} &\leq \epsilon \cdot \frac{|x|+|y|}{|x-y|}\,.
\end{aligned}$$

Wiederholung: Absolute Kondition

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann heißt die kleinste Zahl κ_{abs} mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} \cdot |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

absolute Kondition von $f(x_0)$. Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{abs} vor, so setzt man $\kappa_{\text{abs}} = \infty$.

Achtung: $$\kappa_{\text{abs}} = \kappa_{\text{abs}}(f, x_0)$$

Wiederholung: Absolute Kondition

Satz: Ist f differenzierbar in x_0, so gilt

$$\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)| \; .$$

Satz: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so genügt die absolute Kondition der Abschätzung

$$\kappa_{\text{abs}} \leq L \; .$$

Satz: Für geschachtelte Funktionen $f(x_0) = g(h(x_0))$ gilt

$$\kappa_{\text{abs}} \leq \kappa_{\text{abs}}(h, x_0) \cdot \kappa_{\text{abs}}(g, y_0) \; .$$

Wiederholung: Relative Kondition

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f(x_0) \neq 0$, $x_0 \in I$ und $x_0 \neq 0$. Dann heißt die kleinste Zahl κ_{rel} mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \cdot \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition von $f(x_0)$. Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{rel} vor, so setzt man $\kappa_{\text{rel}} = \infty$.

Satz: Es gilt

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{\text{abs}} \, .$$

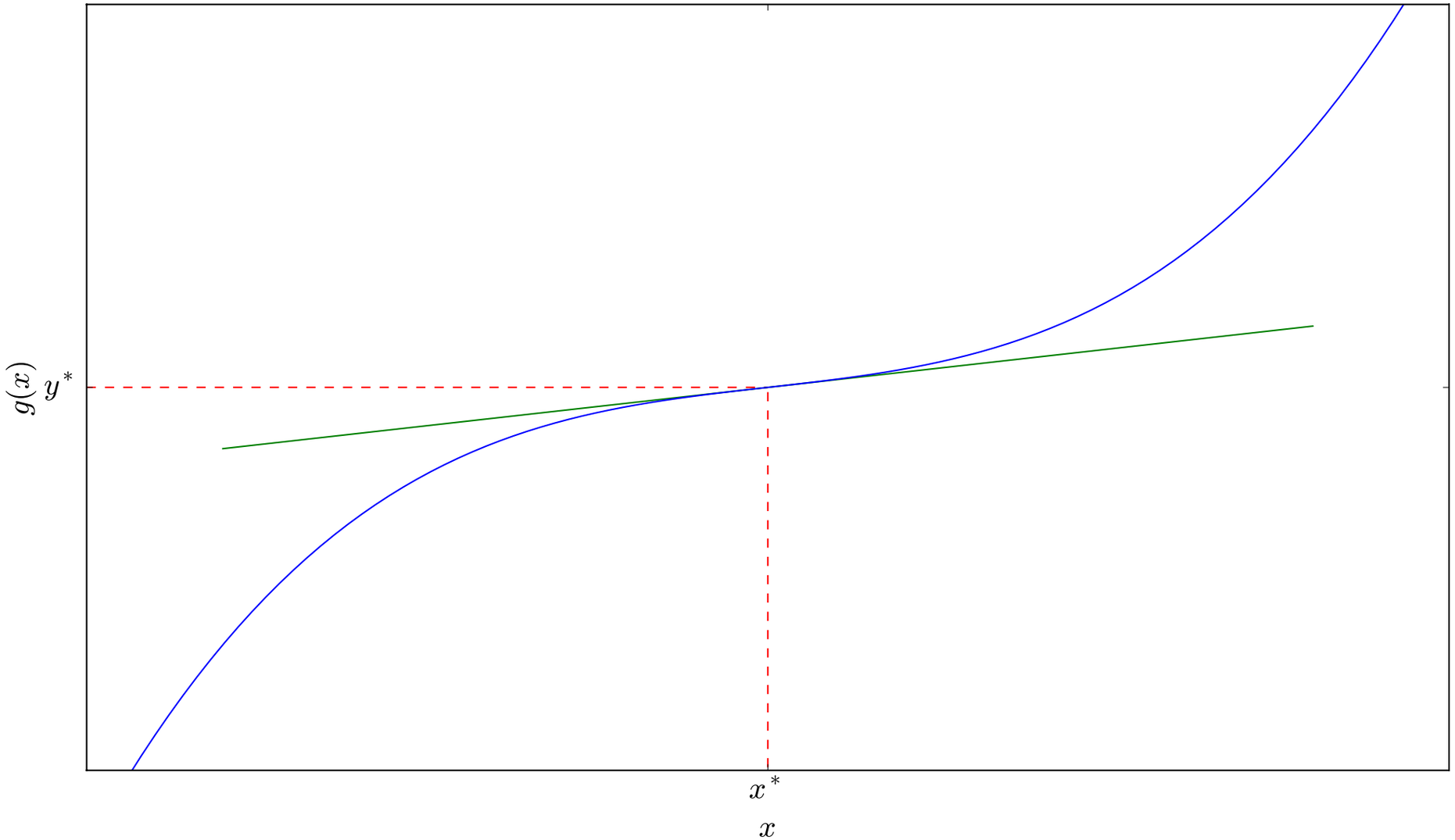
Wiederholung: Merkregeln

- Gleichheitsabfragen von Gleitkommazahlen vermeiden!
- Subtraktion fast gleich großer Gleitkommazahlen vermeiden!

Nichtlineare Gleichungen

Gegeben: $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $y^* \in \mathbb{R}$.

Problem: Finde $x^* \in I$, so dass $g(x^*) = y^*$.



Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

Definition: Die absolute Kondition κ_{abs} der nichtlinearen Gleichung $g(x^*) = y^*$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

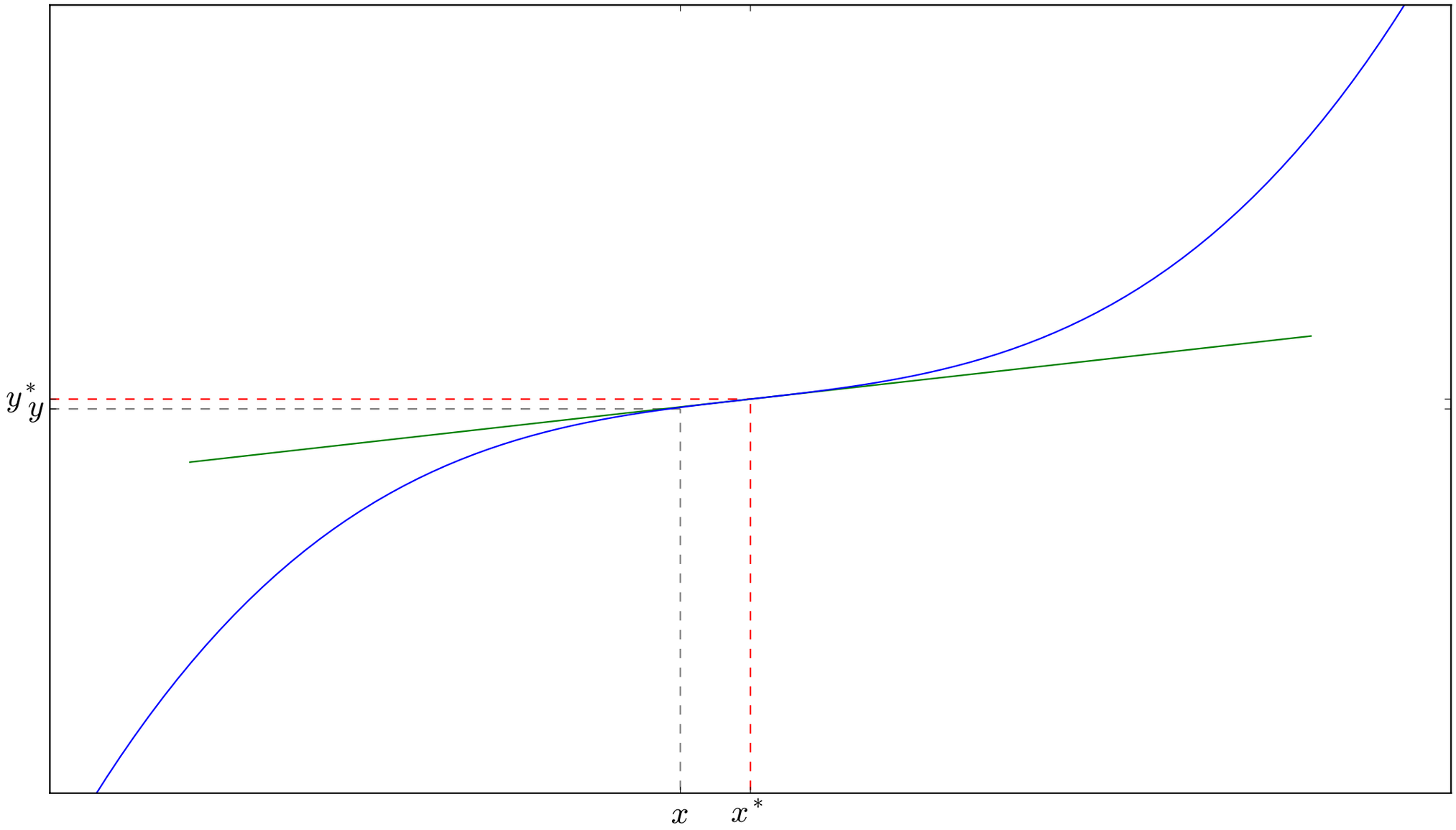
$$|x^* - x| \leq \kappa_{\text{abs}} \cdot |y^* - y| + o\left(|y^* - y|\right)$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y| > 0$ zu y^* und den zugehörigen Lösungen x des gestörten Problems

$$x \in I : \quad g(x) = y\,.$$

Existiert keine solche reelle Zahl κ_{abs}, so wird $\kappa_{\text{abs}} = \infty$ gesetzt.

Das gestörte Problem



Existenz und Eindeutigkeit gestörter Lösungen

Lemma: Sei g stetig differenzierbar in $I = (a, b)$, mit $x^* \in I : g(x^*) = y^*$ sowie

$$g'(x^*) \neq 0\,.$$

Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < x^* < \beta < b$, so dass das gestörte Problem $x : g(x) = y$ für jedes $y \in V$, $V = (g(\alpha), g(\beta))$, eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in U = (\alpha, \beta)$ besitzt.

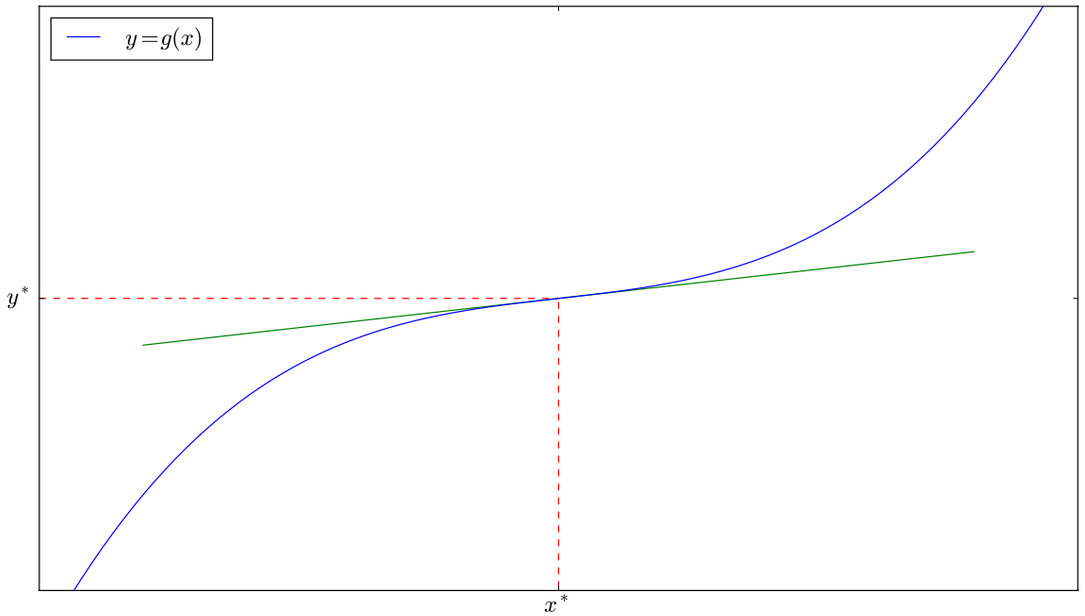
Folgerung: Falls $g'(x^*) \neq 0$, so existiert eine Umkehrfunktion $g^{-1} : V \to U$, so dass

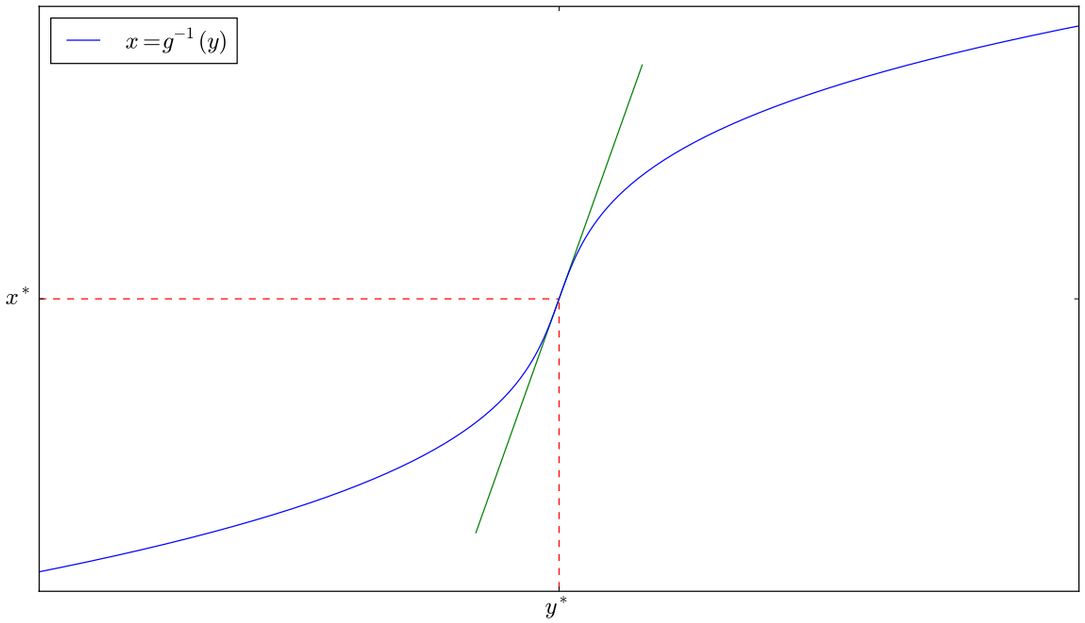
$$g\left(g^{-1}(y)\right) = y\,, \quad \forall\, y \in V\,.$$

Äquivalentes Problem

Gegeben: $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $y_0 \in V$ mit $g'(x^*) \neq 0$.

Problem: Auswertung von $g^{-1} : V \to \mathbb{R}$ an der Stelle $y^* \in V$.

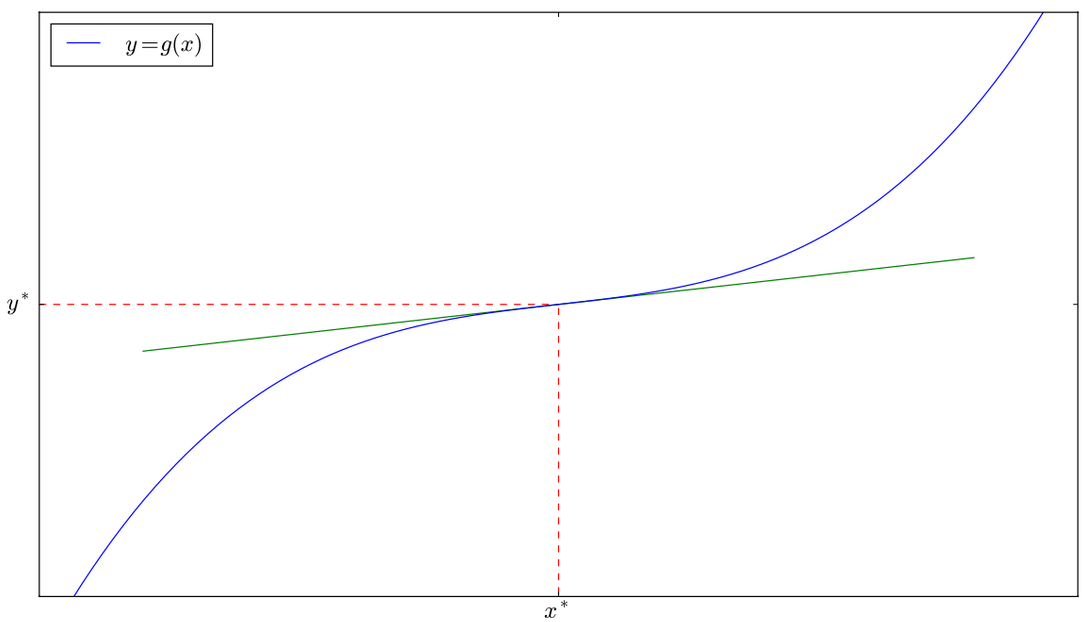


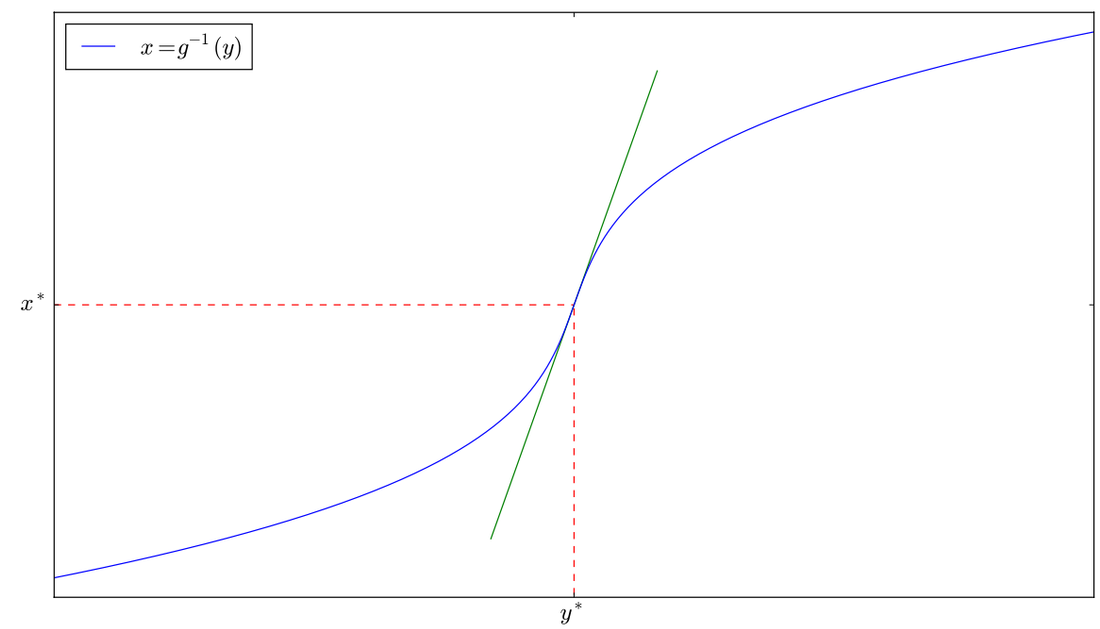


Absolute Kondition der Umkehrfunktion

Lemma: Sei $g \in \mathcal{C}^1(a,b)$, $g(x) = y \in V$ und $g'(x) \neq 0$. Dann ist g^{-1} differenzierbar in y und es gilt

$$\left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{g'(x)}\,, \quad \forall\, y \in V\,.$$





Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz: Sei $g \in \mathcal{C}^1(a,b)$, $g(x^*) = y^* \in V$ und $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die absolute Kondition κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I : \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|} \, .$$

Beispiel: Betrachte $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$. Dann gilt

$$x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a} y \quad \Rightarrow \quad \kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|a|} \, .$$

Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen

Definition: Die relative Kondition κ_{ref} der nichtlinearen Gleichung $g(x^*) = y^*$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \kappa_{\text{rel}} \cdot \frac{|y^* - y|}{|y^*|} + o\left(|y^* - y|\right)$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y| > 0$ zu y^* und den zugehörigen Lösungen x des gestörten Problems

$$x \in I : \quad g(x) = y\,.$$

Existiert keine solche reelle Zahl κ_{rel}, so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz: Sei $g \in \mathcal{C}^1(a,b)$, $x^* \neq 0$, $g(x^*) = y^* \neq 0$ und $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die relative Kondition κ_{rel} der Lösung von

$$x^* \in I : \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*| \cdot |g'(x^*)|} \, .$$

Beispiel: Betrachte $g(x) = ax$, $a \neq 0$. Dann gilt

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{a} y \quad \Rightarrow \quad \kappa_{\text{rel}} = \frac{|ax^*|}{|x^*| \cdot |a|} = 1 \, .$$

Grenzen der Genauigkeit

Geforderte relative Genauigkeit:

$$\mathrm{err} := \frac{|x^* - x|}{|x^*|} < \mathrm{TOL}$$

$$\mathrm{err} \approx \kappa_{\mathrm{rel}} \cdot \mathrm{eps} < \mathrm{TOL} \quad \Rightarrow \quad \kappa_{\mathrm{rel}} < \frac{\mathrm{TOL}}{\mathrm{eps}}$$

$$\kappa_{\mathrm{rel}} \geq \frac{\mathrm{TOL}}{\mathrm{eps}}$$

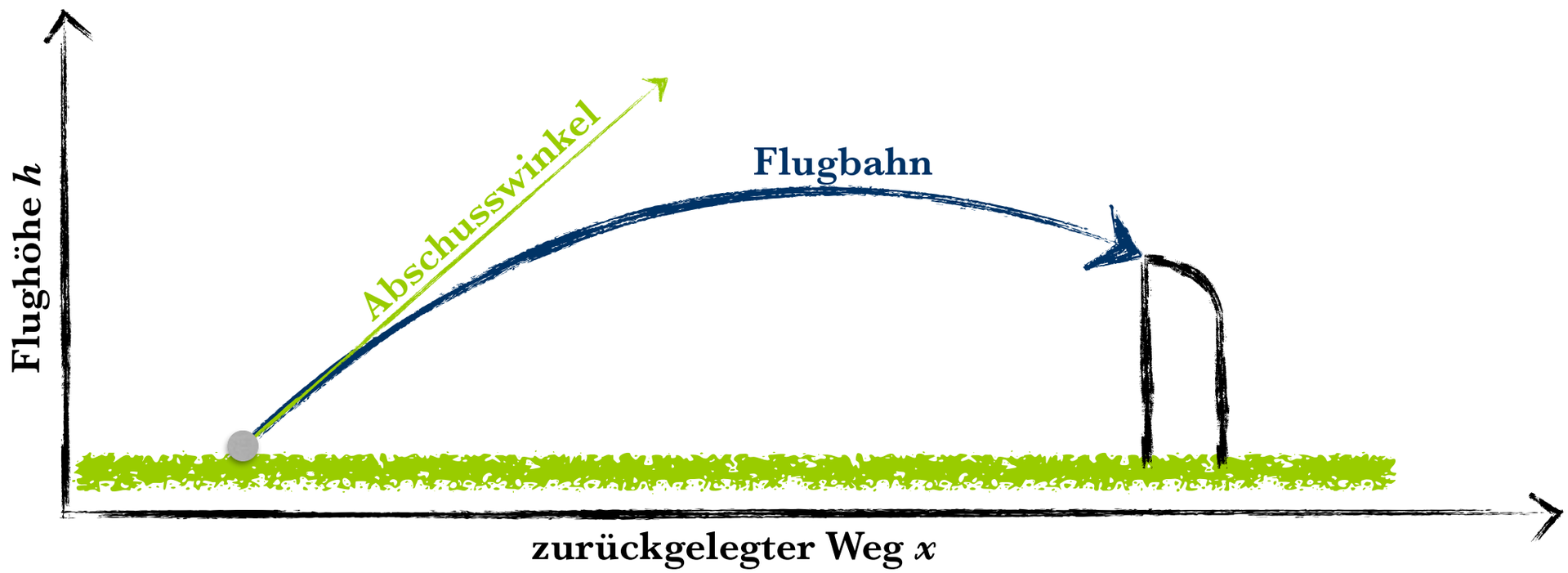
Schlecht konditioniert!

Kondition

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis

Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

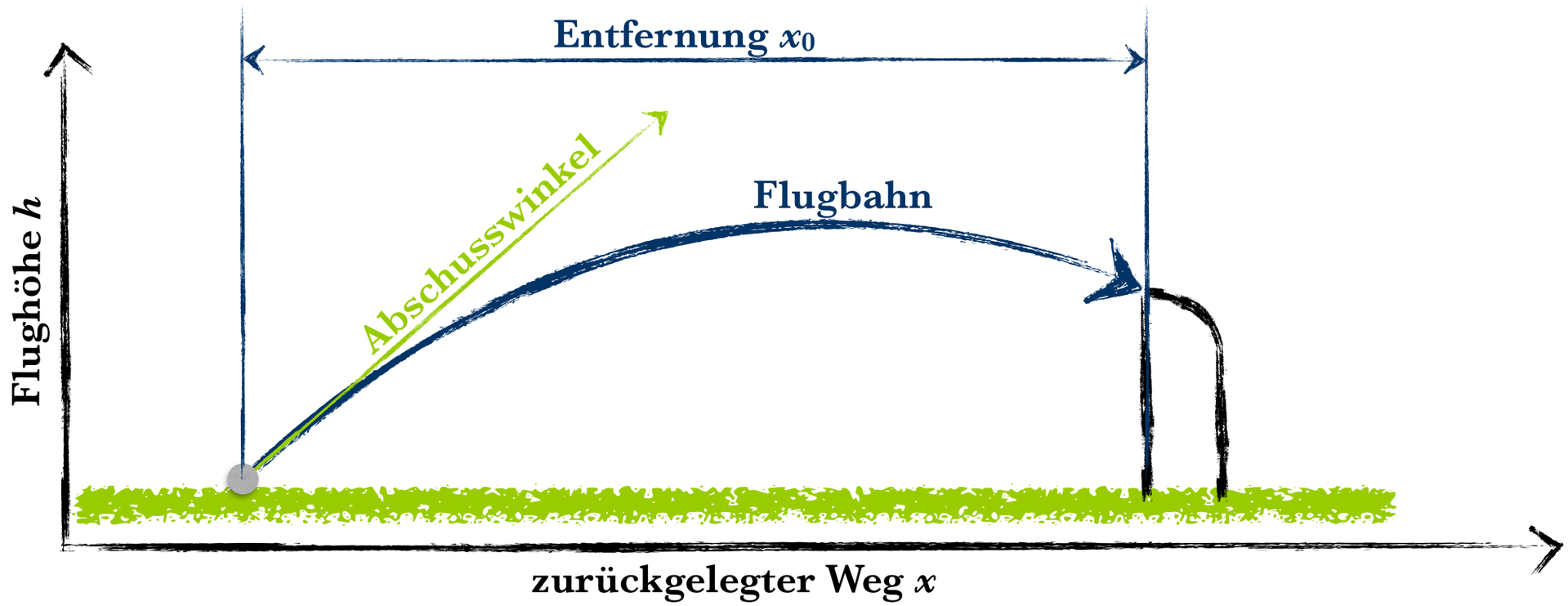
Praktische Übung: Lattentreffer beim Torschuss



$$
\begin{aligned}
h(t) &= vt\sin(\alpha) - \tfrac{1}{2}gt^2 \\
x(t) &= vt\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

$$g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \text{(Fallbeschleunigung)}$$

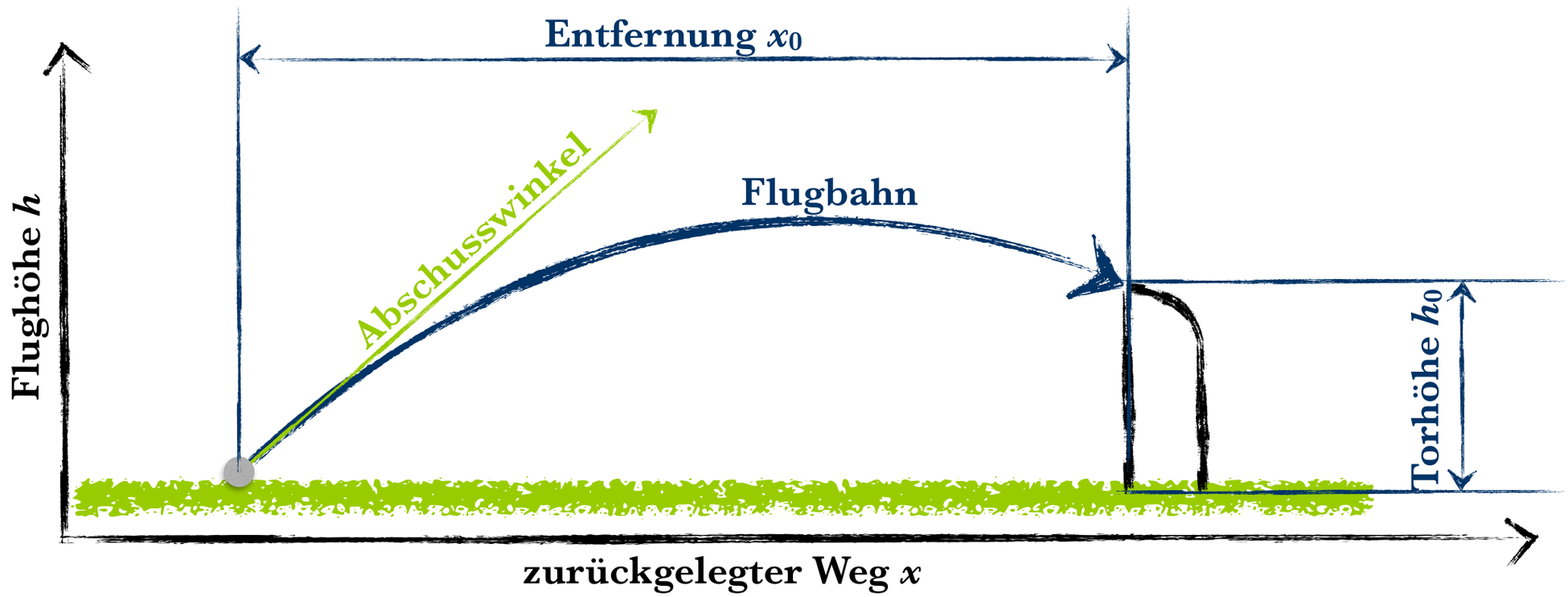
Mathematisches Modell der Flugbahn



$$x_0 = x(t_0) = vt_0 \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{x_0}{v\cos(\alpha)}$$

$$h(t_0) = \frac{vx_0 \sin(\alpha)}{v\cos(\alpha)} - \frac{gx_0^2}{2v^2\cos^2(\alpha)}$$

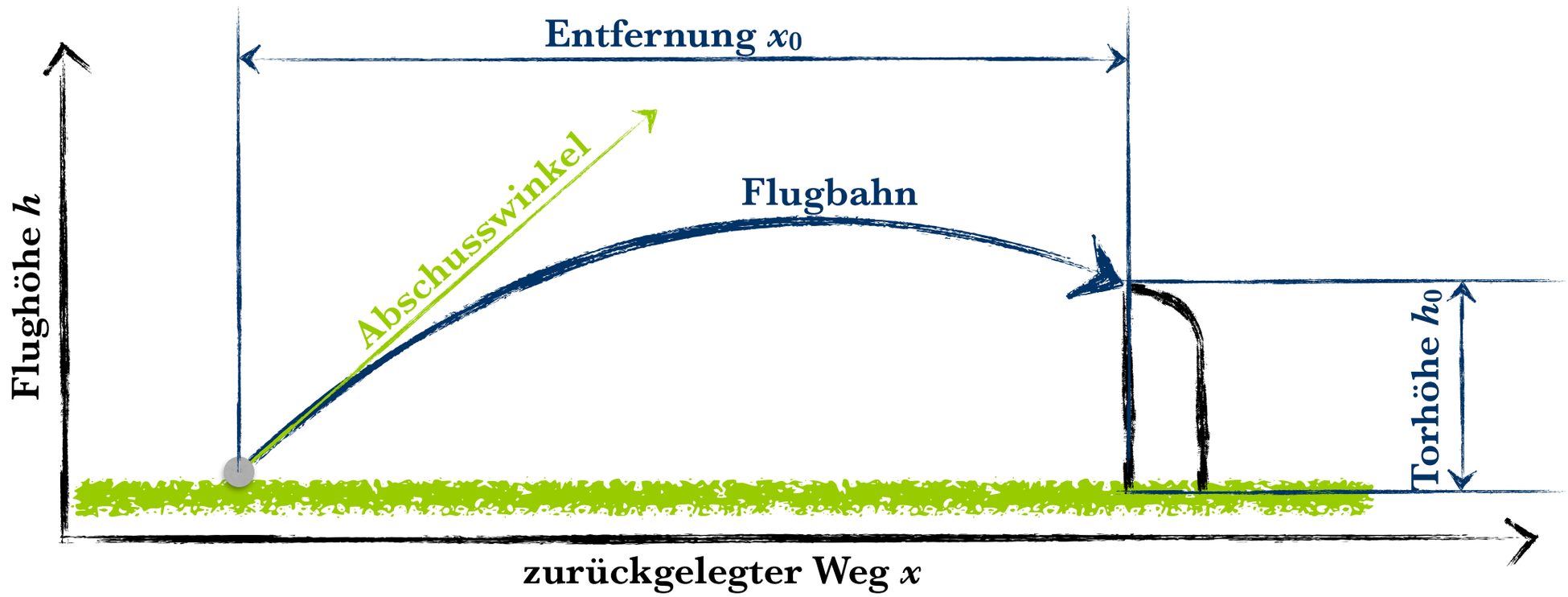
Mathematisches Modell der Flugbahn



$$H(v,\alpha) = x_0 \tan(\alpha) - \frac{g x_0^2}{2v^2 \cos^2(\alpha)}$$

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h$$

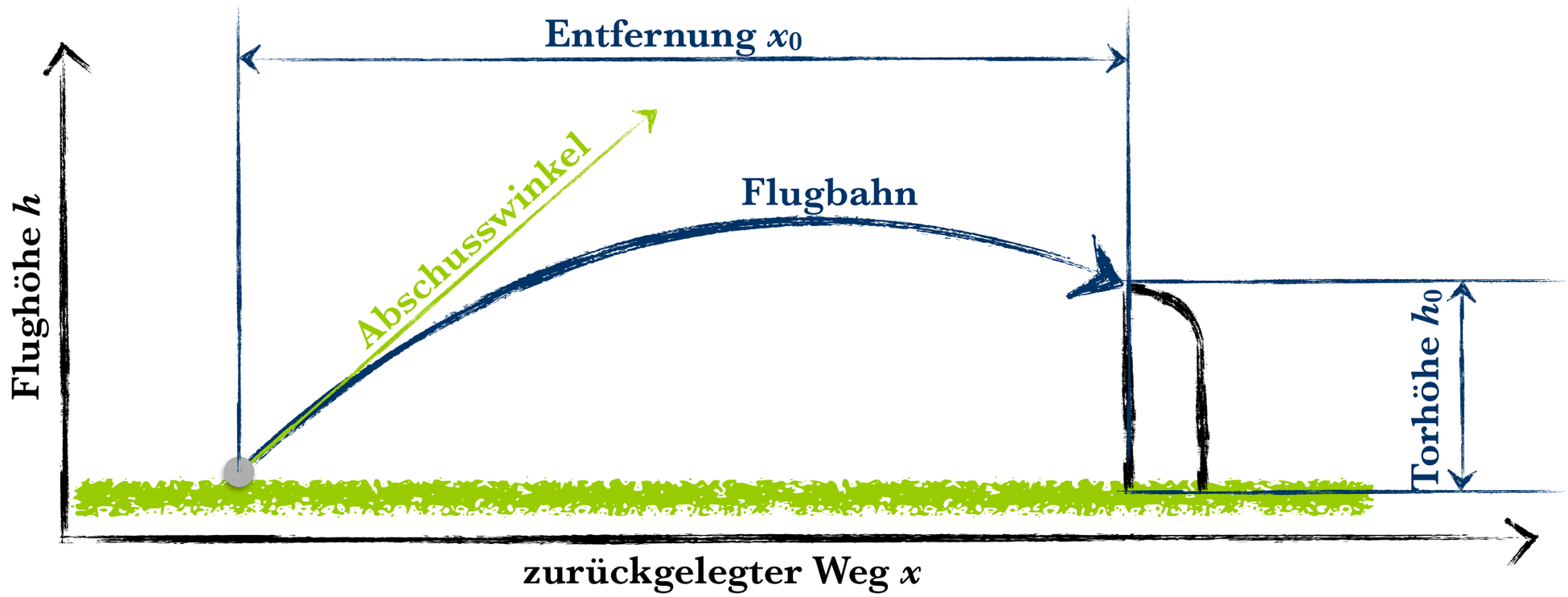
Mathematisches Modell der Flugbahn



Vereinfachungen: Sei $\alpha_0 = 45°$ und $\Delta\alpha = 0$. Dann gilt $\tan(\alpha_0) = 1$, $\cos(\alpha_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und es folgt

$$H(v) = x_0 - \frac{g \cdot x_0^2}{v^2}$$

Mathematisches Modell der Flugbahn



Aufgabe: Sei $h_0 + \Delta h \in (2.5\text{m} \pm 0.04\text{m})$. Wie groß darf Δv sein, so dass $|\Delta h| \leq 0.04\text{m}$?

$$|\Delta h\,(\Delta v)| = |H(v_0 + \Delta v) - H(v_0)| \leq 0.04\text{m}$$

Lösungsansatz: Kondition des Lattentrefferproblems

Sei x_0 gegeben.

1) Berechne $v_0 = H^{-1}(h_0)$

2) Berechne $H(v_0)$ und $H'(v_0)$

3) Berechne κ_{rel} für das gestörte Problem

4) Setze ein und löse für Δv

$$\frac{|\Delta v|}{|v_0|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|\Delta h|}{|h_0|} + o(|\Delta h|)$$

Problematische Stabilität

Beispiel: Betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2a)^3 \\ g(x) &= x^3 - 6ax^2 + 12a^2x - 8a^3\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $f(x) = g(x)$.

Aufgabe: Berechne $f(x)$ und $g(x)$ für

$$a = 4999999\,,\ x = 10000000\,.$$

Problematische Stabilität

```
>> a = 4999999;
>> x = 10000000;
>> f = (x-2*a)^3
f =
        8
```

OK 😐

```
>> g = x^3 - 6*a*x^2 + 12*a^2*x - 8*a^3
g =
        393216
```

NOT OK 😦

Verschiedene Algorithmen führen zu verschiedenen Ergebnissen!

Algorithmen zur Funktionsauswertung

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ gegeben. Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Algorithmen zur Funktionsauswertung

Beispiel: Betrachte

$$f(x_0) = ax_0 + b = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right)$$

mit den Elementarfunktionen $g_2 \circ g_1(x_0)$,

$$g_1(x_0) = ax_0\,,\ g_2(y) = y + b\,,$$

und $h_2 \circ h_1(x_0)$,

$$h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}\,,\ h_2(y) = ay\,.$$