Einführung in regulatorische Netzwerke

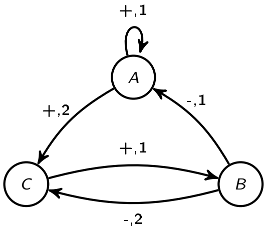
Therese Lorenz

15. März 2016

Interaktionsgraph

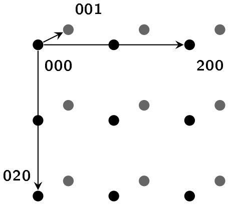
$I = (V, E, \varepsilon, \vartheta)$ IAG

- V Menge der Komponenten
- E Menge der Kanten, Teilmenge von $V \times V$
- $\varepsilon : E \longrightarrow \{+, -\}$ Wirkung: aktivierend/inhibierend
- $\vartheta : E \longrightarrow \mathbb{N}$ (angeordnete) Aktivierungslevel



Zustandsraum

$$X = \prod_{u \in V} \{0, \ldots, \mathrm{max}_u\}, \quad max_u = max_{v \in V}\{\vartheta(u,v)\}$$

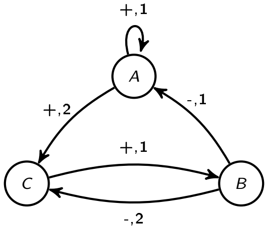


Zustandsübergangsgraph $T = (X, S)$ hat eine Kante (x, y), wenn das System direkt von Zustand x in Zustand y übergehen kann.

Asynchron:

- Immer nur ein Schritt und nur in eine Richtung möglich, also $\mathrm{d}(x, y) = \sum_{u \in V} |x_u - y_u| = 1$.
- Mehrere Kanten von einem Zustand x aus möglich.

Logische Parameter



$K_C(\cdot)$	Einfluss	Zielwert
$\{B\}$	BC aus, AC aus	0
$\{A, B\}$	BC aus, AC an	1 (best case)
$\emptyset$	BC an, AC aus	0 (worst case)
$\{A\}$	BC an, AC an	0

$K_A(\cdot)$	Einfluss	Zielwert
$\{B\}$	AA aus, BA aus	1
$\emptyset$	AA aus, BA an	0 (worst case)
$\{A, B\}$	AA an, BA aus	2 (best case)
$\{A\}$	AA an, BA an	1

$K_B(\cdot)$	Einfluss	Zielwert
$\emptyset$	CB aus	0
$\{C\}$	CB an	1

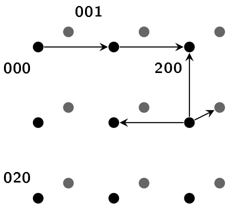
Ressource im Zustand x für Komponente u

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(x, u) &= \{\text{``positive'' Einflüsse auf } u \text{ im Zustand } x\} \\ &= \{\text{aktive pos Kanten zu } u\} + \{\text{inaktive neg Kanten zu } u\} \end{aligned}$$

Für eine vollständige Beschreibung des Systems werden die logischen Parameter auf allen Teilmengen der Vorgängermengen $\mathrm{Vor}(u)$ definiert.

ASTG (asynchronous state transition graph) $T = (X, S)$

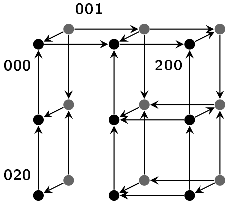
Sei x ein Zustand aus X.
Es gibt eine Kante von x nach $x + \mathbf{e}_v$, wenn $K_v(Res(x, v)) > x_v$.
Analog eine Kante von x nach $x - \mathbf{e}_v$, wenn $K_v(Res(x, v)) < x_v$.



$x = 000$	$\text{Res}(x, A) = \{B\}$	$K() = 1$	Kante zu 100
	$\text{Res}(x, B) = \emptyset$	$K() = 0$	keine Kante
	$\text{Res}(x, C) = \{B\}$	$K() = 0$	keine Kante
$x = 100$	$\text{Res}(x, A) = \{A, B\}$	$K() = 2$	Kante zu 200
	$\text{Res}(x, B) = \emptyset$	$K() = 0$	keine Kante
	$\text{Res}(x, C) = \{B\}$	$K() = 0$	keine Kante
$x = 210$	$\text{Res}(x, A) = \{A\}$	$K() = 1$	Kante zu 110
	$\text{Res}(x, B) = \emptyset$	$K() = 0$	Kante zu 200
	$\text{Res}(x, C) = \{A, B\}$	$K() = 1$	Kante zu 211

ASTG (asynchronous state transition graph) $T = (X, S)$

Sei x ein Zustand aus X.
Es gibt eine Kante von x nach $x + \mathbf{e}_v$, wenn $K_v(Res(x, v)) > x_v$.
Analog eine Kante von x nach $x - \mathbf{e}_v$, wenn $K_v(Res(x, v)) < x_v$.



$x = 000$	$\text{Res}(x, A) = \{B\}$	$K() = 1$	Kante zu 100
	$\text{Res}(x, B) = \emptyset$	$K() = 0$	keine Kante
	$\text{Res}(x, C) = \{B\}$	$K() = 0$	keine Kante
$x = 100$	$\text{Res}(x, A) = \{A, B\}$	$K() = 2$	Kante zu 200
	$\text{Res}(x, B) = \emptyset$	$K() = 0$	keine Kante
	$\text{Res}(x, C) = \{B\}$	$K() = 0$	keine Kante
$x = 210$	$\text{Res}(x, A) = \{A\}$	$K() = 1$	Kante zu 110
	$\text{Res}(x, B) = \emptyset$	$K() = 0$	Kante zu 200
	$\text{Res}(x, C) = \{A, B\}$	$K() = 1$	Kante zu 211

Bemerkung: Die Belegung der logischen Parameter ist nicht eindeutig, mit $K_A(\{B\}) = 2$ wird derselbe ASTG erzeugt.

Attraktoren

Als Attraktor werden die terminalen starken Zusammenhangskomponenten des ASTGs bezeichnet.

- stark zusammenhängend: für alle Zustände x, y gibt es einen Weg von x nach y und einen von y nach x
- starke Zusammehangskomponente: inklusionsmaximale stark zusammenhängende Menge
- terminal: es gibt keine ausgehenden Kanten

- Ein Attraktor, der nur aus einem Zustand besteht, heißt *stabiler Zustand*. Dabei handelt es sich um einen Fixpunkt der Updatefunktion.
- Ein Attraktor mit mindestens 2 Zuständen heißt *zyklischer Attraktor*.

Snoussi/Monotonie-Bedingung

- Eine Kante (u, v) erfüllt die Snoussi-Bedingung, wenn:
$$\forall \omega \subseteq \mathrm{Vor}(v) : K_v(\omega) \leq K_v(\omega \cup \{u\})$$
- Eine Komponente v erfüllt die Snoussi-Bedingung, wenn alle eingehenden Kanten die Snoussi-Bedingung erfüllen, oder:
$$\forall \omega \subseteq \varsigma \subseteq \mathrm{Vor}(v) : K_v(\omega) \leq K_v(\varsigma)$$
- Ein Modell (I, K) erfüllt die Snoussi-Bedingung, wenn alle Komponenten sie erfüllen.

Beobachtbarkeit

- Eine Kante (u, v) ist beobachtbar, wenn es ein $\omega \subseteq \mathrm{Vor}(v)$ gibt, sodass $K_v(\omega) \neq K_v(\omega \cup \{u\})$.
- Ein Modell (I, K) erfüllt die Beobachtbarkeits-Bedingung, wenn alle Kanten beobachtbar sind.

Alternative Modellbeschreibung

Updatefunktion f

Für jeden Zustand x aus X wird ein Nachfolgezustand $f(x)$ in X bestimmt.

$$(x, x + \mathbf{e}_v) \in S \quad \Longleftrightarrow \quad x_v < f_v(x)$$
$$(x, x - \mathbf{e}_v) \in S \quad \Longleftrightarrow \quad x_v > f_v(x)$$

Beispiel:

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & x_A = 0, x_B \geq 1 \\ 1 & x_A \geq 1, x_B \geq 1 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_B(x) = \begin{cases} 0 & x_C = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & x_A = 2, x_B \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Werte der Updatefunktion sind ebenfalls nicht eindeutig.

Die Updatefunktion benötigt keinen Interaktionsgraph, man kann ihn aus der Funktion konstruieren.

Lokaler Interaktionsgraph $G_x(f) = (V, E_x(f), \varepsilon_{x,f}, \vartheta_{x,f})$

Dabei ist (u, v) eine Kante, wenn es $\alpha \in \{\pm 1\}$ gibt, sodass $(x + \alpha \cdot \mathbf{e}_u) \in X$ und $f_v(x + \alpha \cdot \mathbf{e}_u) \neq f_v(x)$.
Dann ist $\varepsilon_{x,f}(u, v) = (f_v(x + \alpha \cdot \mathbf{e}_u) - f_v(x))/\alpha$ und $\vartheta_{x,f}(u, v) = max\{x_u, x_u + \alpha\}$.

Aus den lokalen Graphen kann der globale Interaktionsgraph konstruiert werden:

Globaler Interaktionsgraph: $G(f) = \bigcup_{x \in X} G_x(f)$.

Bemerkung: Es kann bei dieser Konstruktion zu Mehrfachkanten kommen.