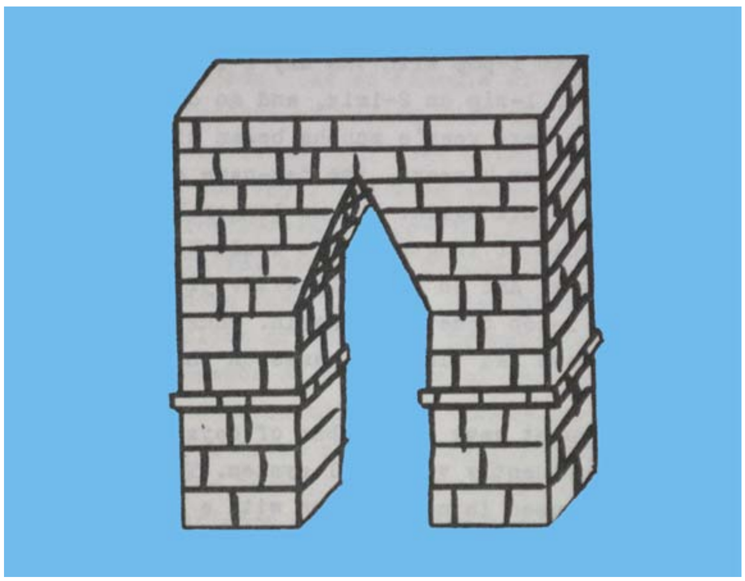
BRÜCKENKURS MATHEMATIK



Verfasser: Hans Scheerer

Textverarbeitung: Silvia Hoemke

EDV: Arnold Kühnel

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der „Brückenkurs Mathematik“ ist in keinem der vielen Studiengänge als Veranstaltung vorgeschrieben. Er wird von den Studenten freiwillig besucht, vom Fachbereich Mathematik und Informatik der Freien Universität freiwillig angeboten. Vor Vorlesungsbeginn jeden Semesters trifft man sich (die „neuen“ Studenten, ein Dozent mit Mitarbeitern) für zwei Wochen, um „höhere Mathematik“ zu diskutieren. Eingeführt wurde diese Veranstaltung unter dem Slogan bzw. der Devise, den angehenden Studenten der Mathematik (oder Informatik oder was auch immer) den Übergang von der Schule zur Universität (jedenfalls was Mathematik betrifft) zu erleichtern. Ob dieses Ziel erreicht wird, hat meines Erachtens niemand nachgeprüft, wie denn auch? Und die naheliegende Frage, ob denn die Anfängervorlesungen, traditionell „Analysis I“ und „Lineare Algebra I“ und neuerdings „Computerorientierte Mathematik“, das nicht auch leisten könnten, wird längst nicht mehr gestellt. Sie werden vielleicht feststellen können, dass der Brückenkurs unter diesen Bedingungen einen besonderen Charakter bekommt, den Sie in kaum einer der zukünftig zu absolvierenden Veranstaltungen wiedertreffen werden. Die besondere Situation hat den großen Vorteil, dass jeder frei entscheiden kann, wie weit er gehen will, der Dozent, welche Inhalte er, sanft oder „knallhart“, vorgeben soll, die Studenten, wie weit sie ihm dabei folgen wollen; und es ist einfach, bei diesem Prozess auf den Konsens zu achten. Ich hatte zum Beispiel immer eine große Freude, die Reaktionen all der verschiedenen Individuen zu beobachten und zu sehen, wie weit wir uns zusammenfinden konnten. Ob ich jedesmal das richtige Maß gefunden habe, mag dahingestellt sein.

Der Brückenkurs hat etwas Schwebendes an sich. Denn es wird auch keine einhellige Meinung darüber geben, was seine Inhalte sein sollen. Wenn ich an seine Ziele denke, halte ich das auch nicht für nötig. Im Unterschied zur Schulmathematik versucht man in der höheren Mathematik, Sachverhalte so allgemein wie möglich oder nötig zu betrachten und genauestens zu begründen. Das ist schon ein gewisser Unterschied, den zu überwinden oder an den sich anzupassen einige Anstrengung erfordert. Ich vergleiche das manchmal mit dem Übergang vom Amateurlager zum Profitum: Man hat die eigenen Kräfte und Möglichkeiten genau einschätzen zu lernen und optimal zu trainieren. Wie das bewerkstelligt werden kann, läßt sich an jedem sinnvollen Sujet demonstrieren, der Dozent weiß ja, was auf jeden noch zukommt. Er wird die Freude am Training zu fördern versuchen. So will ich es auch hier halten.

Die Kapitel 1,2,3, A beschäftigen sich mit grundlegenden Dingen wie Logik, Mengen und Zahlen. Diese werden in den Anfängervorlesungen mehr oder weniger ausgiebig behandelt. Aber ohne sie kommen wir nicht aus (Es hat schon Studenten gegeben, die sich beschwert haben, dass sie wiederholt das gleiche Thema vorgesetzt bekamen). Die anderen Kapitel dienen mit verschiedenen Sujets dem beschriebenen Training. Mit den Inhalten der Kapitel 6,7,B werden die meisten von Ihnen zum ersten und letzten Mal im ganzen vorgesehenen Studium befasst sein. Aber bitte nicht vergessen: Unser Training dient auch dem Spaß .

Kapitel 1: Jeder (auch die nicht viel mit Mathematik am Hut haben) kann es durchgehen. Nur die „dicke“ Aufgabe 1.6 ist vielleicht nicht eines jeden Sache.

Kapitel 2: Ein Muss sind die Abschnitte 2.1 - 2.3 und der Versuch, den Begriff der Abbildung in 2.4 zu verstehen. Erfahrungsgemäß kann das Schwierigkeiten bereiten. Dann halten Sie sich an die Beispiele.

Kapitel 3: Natürliche Zahlen, vollständige Induktion, rekursive Definition, das muss sein. Die ein wenig subtile Diskussion zu den Peano-Axiomen könnte Ihnen Schwierigkeiten bereiten, dann halten Sie sich an die Beispiele und lernen das Prinzip der vollständigen Induktion „by doing“. So können Sie auch überall vorgehen, insbesondere bei dem Begriff der „rekursiven Definition“, die in unserem Kurs eine ubiquitäre Methode ist.

Unter den restlichen Kapiteln suchen Sie sich aus, was Ihnen am besten zusagt. Da es leicht ist in unserem Kurs zu manövrieren, können Sie im Prinzip mit jedem Kapitel anfangen.

Außer in Kapitel 1 steigt normalerweise der Schwierigkeitsgrad zum Ende des Kapitels hin. Ich empfehle daher, dass Sie in einem Kapitel Ihrer Wahl nach dem Aufwärmen am Anfang sich so sehr anstrengen, wie Sie können, und bis zum Ende des Kapitels zu gehen versuchen. Bei dieser Gelegenheit sollte ich schnell etwas gestehen: Die Inhalte entsprechen denen meiner vergangenen Liveveranstaltungen, nur habe ich niemals alles in einem einzigen Kurs präsentiert. Es handelt sich hier sozusagen um die Summe von mehreren Kursversionen. Noch schlimmer: Jetzt hat mich beim Verfassen der akademische Teufel geritten, und ich habe gegen Ende der Kapitel noch was drauf gepackt, aus reiner Neugier, wie weit sich gewisse Gedankengänge in diesem

Rahmen noch verfolgen lassen. Wenn Sie mit Anleitung eines Dozenten diesen Text studieren, ist das kein Problem. Wenn Sie auf sich gestellt sind, dann gilt mein Rat:

Strengen Sie sich an, aber wenn Sie an einen Punkt kommen sollten (!), wo es Ihnen reicht, kein Problem, meine dicken Säcke brauchen Sie nicht zu schultern. Ein Wort zu den Aufgaben, fast hätte ich es tatsächlich vergessen:

Versuchen Sie möglichst viele davon zu lösen! Das ist die einzig wahre Methode, Ihr Verständnis zu testen.

Viel Spaß mit der Mathematik!
Ihr Hans Scheerer

PS. Ein Wort zu Kapitel B: Ich hatte Lust, es zu schreiben, weil es zeigt, was es „sonst noch so“ gibt in der Mathematik. Vielleicht können Sie einfach nur das Flair der Anschaulichkeit riechen und das Kapitel später einmal aus gegebenem Anlaß , z.B. dem Besuch der Vorlesung „Einführung in die Topologie“, richtig goutieren.

PSPS. Die Comics sind „manifold“ entnommen, der legendären, von Studenten in Warwick herausgegebenen, unterhaltsamen, informativen Mathematikzeitung zu Beginn der 70^{er} Jahre des letzten Jahrhunderts.

PSPSPS. Zum Lesen der Datei benötigt man „Acrobat Reader“ ab Version 5.0.

e-mail: scheerer@math.fu-berlin.de

1 Kleine Einführung in die Aussagenlogik

Hier wollen wir weder Logik, noch den „Aussagenlogik“ genannten Teil der Logik systematisch betreiben. Wir wollen im wesentlichen nur einen gewissen mathematischen Sprachgebrauch festlegen. Denn wir können alle logisch korrekt deduzieren, ohne darüber nachdenken zu müssen. Oder etwa nicht? Mit folgendem Beispiel geben wir Ihnen die Möglichkeit, sich in der Beziehung zu testen:

Wer ist auf dem Bild?

Ein Mann stand vor einem Portrait. Jemand fragte ihn: „Wer ist das auf dem Bild, das Sie sich da ansehen?“ Er antwortete: „Brüder habe ich nicht, aber der Vater dieses Mannes ist der Sohn meines Vaters.“ („Der Vater dieses Mannes“ bezieht sich natürlich auf den Vater des Mannes auf dem Bild.)
Wessen Portrait betrachtete der Mann?

Wir gliedern unser kleines Kapitel über Logik in die folgenden Teile:

1.1 Logische Verknüpfungen

1.2 Logische Gesetze

1.3 Dualitätsprinzip

1.4 Quantoren

1.5 Mini-Liste weiterführender Literatur

1.1 Logische Verknüpfungen

Hier wollen wir nur den mathematischen Gebrauch von „und", „oder", „impliziert" etc. festlegen, ihn insbesondere -wenn nötig- gegen den Gebrauch in der Alltagssprache abgrenzen.
Zu diesem Zweck denken wir uns eine Reihe von Aussagen gegeben, sagen wir $A, B, C, \ldots$. Wir nehmen an, dass jede dieser Aussagen falsch oder wahr ist - aber nur eines von beiden („tertium non datur" sagt der Lateiner)! Zumindest sollten wir das im Prinzip feststellen können, ohne uns große Gedanken darüber machen zu müssen, was Wahrheit ist. (Wir wollen sozusagen nichts mit solchen bizarren Sprüchen wie
„Im Augenblick lüge ich"
zu tun haben.)

Betrachten wir ein Beispiel: Wenn ich sage:

„Heute kaufe ich ein, und ich koche."

so muß ich beides tun, um nicht der Lüge bezichtigt zu werden.

Wir vereinbaren:

1.1 Definition. *Konjunktion.*
Die zusammengesetzte Aussage „A und B" (in Zeichen $A \wedge B$) ist genau dann wahr, wenn A, B beide wahr sind.

Die Bedeutung einer Verknüpfung kann man sich in anschaulicher Weise mit einer sogenannten „Wahrheitstafel" klarmachen.

Wahrheitstafel für $A \wedge B$:

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

In den Zeilen stehen zuerst die möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten (f für falsch, w für wahr) für A, B, dann folgt der resultierende Wahrheitswert für $A \wedge B$.

Kommen wir als nächstes zur Disjunktion:

1.2 Definition. *Disjunktion.*
Die Aussage „A oder B" (in Symbolen: $A \vee B$) trifft genau dann zu, wenn wenigstens eine der Aussagen A, B zutrifft (oder eben auch beide zutreffen).

Wandeln wir das Beispiel von oben entsprechend ab. Die Aussage

„Heute koche ich, oder ich kaufe ein."

ist richtig, wenn ich heute eine der beiden oder beide Tätigkeiten ausübe. Im alltäglichen Sprachgebrauch denkt man bei „oder" manchmal eher an ein „ausschließliches oder", das ist hier nicht so. Vorsicht ist also geboten.

1.1 Aufgabe. Ergänzen Sie folgende Tabelle zur Wahrheitstafel für $A \vee B$:

A	B	$A \vee B$
f	f	
f	w	
w	f	
w	w	

1.3 Definition. *Negation.*
Die Aussage „nicht A" (in Zeichen: $\neg A$) ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
f	w
w	f

1.4 Definition. *Implikation.*
Die Aussage „A impliziert B“ (in Zeichen: $A \implies B$) ist eine Abkürzung für „$(\neg A) \vee B$“, d.h. sie ist genau dann wahr, wenn A falsch oder B wahr ist. Andere Ausdrucksweisen sind: „aus A folgt B“, „wenn A, dann B“.

Die zugehörige Wahrheitstafel sieht also wie folgt aus:

A	B	$A \implies B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Wenn wir einen Nachweis für die Richtigkeit der Aussage „$A \implies B$“ erbringen sollen, stellen wir uns meistens vor, dass wir B irgendwie aus A zu deduzieren haben. D.h. wir müssen die Kombination der Wahrheitswerte w, f für A, B ausschließen. Wenn die Aussage A schon falsch ist, brauchen wir gar nichts mehr zu tun, es sei denn jemand insistiert wie in der folgenden Anekdote:

Russell und der Papst.
Ein Philosoph war schockiert, als er von Bertrand Russell hörte, dass ein falscher Satz jeden Satz impliziert. Er sagte: „Sie meinen, dass aus der Aussage, dass zwei und zwei gleich fünf ist, folgt, dass Sie der Papst sind?“ Russell antwortete: „Ja“. Der Philosoph fragte: „Können Sie das beweisen?“ Russell gab zurück: „Gewiß“, und erfand auf der Stelle den folgenden Beweis:

(1) Angenommen $2 + 2 = 5$.

(2) Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung zwei subtrahieren, erhalten wir $2 = 3$.

(3) Durch Umstellen erhalten wir $3 = 2$.

(4) Wenn wir auf beiden Seiten eins subtrahieren, erhalten wir $2 = 1$. Nun sind der Papst und ich zwei. Da zwei gleich eins ist, sind der Papst und ich eins. Folglich bin ich der Papst.

Noch eine Vereinbarung:

1.5 Definition. *Äquivalenz.*
Wir sagen „A äquivalent B" (in Zeichen: $A \iff B$) als Abkürzung für $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$.

1.1 Beispiel: Nach Definition gilt $(A \Longrightarrow B) \iff ((\neg A) \vee B)$.

1.2 Aufgabe. Ergänzen Sie zur Wahrheitstafel von $A \iff B$:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longleftarrow A$	$A \iff B$
f	f	w	w	
f	w	w	f	
w	f	f	w	
w	w	w	w	

(Sie stellen fest, dass $A \iff B$ genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen falsch sind oder beide wahr).

1.3 Aufgabe. Prüfen Sie nach, dass folgende zusammengesetzte Aussage unabhängig von den Wahrheitswerten von A, B, C immer wahr ist:
$(*)\qquad ((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$

Zum Beweis empfehlen wir, verbal zu argumentieren.
Sie können aber auch die folgende Tafel zu einer Wahrheitstafel ergänzen und „zusehen", dass in die letzte Spalte lauter w's zu stehen kommen (Kürzen Sie nach Möglichkeit den Weg, alle Wahrheitswerte einzutragen etwas ab!).

A	B	C	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow C$	$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)$	$(A \Longrightarrow C)$	Formel (*)
f	f	f					
f	f	w					
f	w	f					
f	w	w					
w	f	f					
w	f	w					
w	w	f					
w	w	w					

Hier ist noch ein interessanter Punkt zu vermerken. Wie können wir sicher sein, dass wir in den drei ersten Spalten alle Verteilungen der Wahrheitswerte f, w auf die drei Aussagen A, B, C gefunden haben? Wir können es sein, wenn wir an die Kraft der alphabetischen Ordnung glauben. Denn wir haben alle Wörter mit drei Buchstaben aus einem Alphabet mit den zwei Buchstaben f, w aufzulisten. Genau das haben wir gemacht! (Vergl. Sie Satz 3.6).

1.4 Aufgabe. Basteln Sie eine Formel in A und B, die das ausschließliche „oder“ wiedergibt.

Die folgenden Aufgaben sind dem Buch von R. Smullyan mit dem Titel „Wie heißt dieses Buch“, Vieweg Verlag, 1981, entnommen, und sie sollen der amüsanten (?) Einübung des Gebrauchs der logischen Verknüpfungen dienen:

1.5 Aufgabe. Probleme von Alice mit Zwiddeldum und Zwiddeldei.

Der Löwe und das Einhorn blieben dem Wald des Vergessens einen Monat lang fern. Sie waren irgendwo und kämpften eifrig für die Krone.
Jedoch waren Zwiddeldum und Zwiddeldei häufige Besucher des Waldes. Nun ist einer der beiden wie der Löwe, er lügt am Montag, Dienstag und Mittwoch und sagt an den anderen Wochentagen die Wahrheit. Der andere ist wie das Einhorn; er lügt donnerstags, freitags und samstags, aber sagt an den anderen Tagen der Woche die Wahrheit. Alice wußte nicht, welcher der beiden wie der Löwe und welcher wie das Einhorn war. Um die Sache noch schlimmer zu machen, sahen die Brüder einander so ähnlich, dass Alice sie nicht einmal voneinander unterscheiden konnte (es sei denn, sie trugen ihre bestickten Kragen, was sie selten taten). So fand die arme Alice die Situation in der Tat höchst verwirrend! Hier sind einige von Alices Erlebnissen mit Zwiddeldum und Zwiddeldei.

(a) Eines Tages traf Alice die beiden Brüder, und sie stellten folgendes fest:

Erster / Ich bin Zwiddeldum.
Zweiter / Ich bin Zwiddeldei.

Wer war wirklich Zwiddeldum, und wer war Zwiddeldei?

(b) An einem anderen Tag der gleichen Woche machten die beiden Brüder die folgenden Aussagen:

Erster / Ich bin Zwiddeldum.
Zweiter / Wenn das wirklich wahr ist, dann bin ich Zwiddeldei!

Wer war wer?

(c) Bei einer anderen Gelegenheit machten die Brüder folgende Aussagen:

Erster /	(1) Ich lüge samstags.
	(2) Ich lüge sonntags.
Zweiter /	Ich werde morgen lügen.

An welchem Wochentag geschah das?

(d) Eines Tages traf Alice zufällig nur einen der Brüder. Er stellte folgendes fest:
„Ich lüge heute, und ich bin Zwiddeldei."
Wer hat das gesagt?
Nehmen wir an, er hätte stattdessen gesagt: „Ich lüge heute, oder ich bin Zwiddeldei." Läßt sich feststellen, wer er war?

(e) Eines Tages traf Alice zufällig die beiden Brüder. Sie stellten folgendes fest:

Erster / Wenn ich Zwiddeldum bin, dann ist er Zwiddeldei.
Zweiter / Wenn er Zwiddeldei ist, dann bin ich Zwiddeldum.

Ist es möglich festzustellen, welcher von beiden wer ist? Ist es möglich, den Wochentag zu bestimmen?

(f) **Ein Geheimnis wird gelüftet!**
Bei dieser großen Gelegenheit klärte Alice drei große Geheimnisse auf. Sie traf die beiden Brüder, die feixend unter einem Baum saßen. Sie hoffte, dass sie bei dieser Begegnung drei Dinge herausfinden würde: (1) den Wochentag; (2) welcher der beiden Zwiddeldum war; (3) ob Zwiddeldum in seinen Lügengewohnheiten dem Löwen oder dem Einhorn glich (etwas, was sie schon seit langem wissen wollte!). Die beiden Brüder machten also die folgenden Aussagen:

Erster / Heute ist nicht Sonntag.
Zweiter / In Wirklichkeit ist heute Montag.
Erster / Morgen ist einer von Zwiddeldeis Lügentagen.
Zweiter / Der Löwe hat gestern gelogen.

> Alice klatschte vor Freude in die Hände. Das Problem war jetzt vollkommen gelöst. Wie lautet die Lösung?

Noch eine Aufgabe?

Die folgende Aufgabe haben wir einem weiteren Text von R. Smullyan entnommen: Dame oder Tiger? Logische Denkspiele und eine mathematische Novelle über Gödels große Entdeckung. S. Fischer Verlags GmbH (1983).

Bei uns ist die Dame von Harry Potter in ein Pferd verwandelt worden!

1.6 Aufgabe. Ein logisches Labyrinth.
Ein Puzzlefan, zugleich ein König, fand große Genugtuung daran, Gefangenen eine Puzzlechance zur Freiheit zu geben. Heute geht dies wie folgt vor sich: Der Gefangene hat unter neun Räumen zu wählen. Ein Raum enthält ein Pferd (zum Ritt in die Freiheit), die andern sind entweder leer, oder ein Tiger befindet sich darin. Jeder Raum ist mit einer Inschrift versehen; diejenige am Raum mit dem Pferd ist wahr, diejenigen an den Tigerräumen sind falsch, die anderen können wahr oder auch falsch sein.

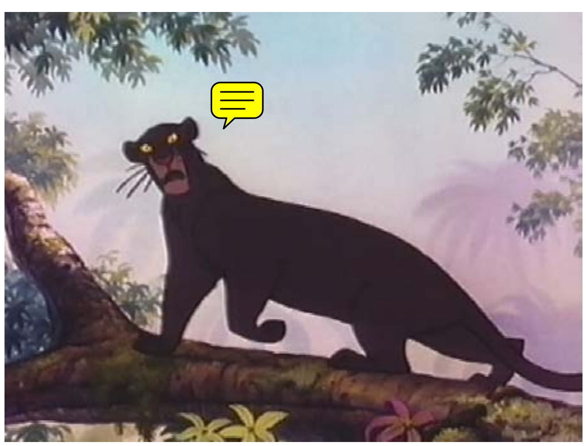
Wie findet der Gefangene das Pferd?

I	II	III
Das Pferd ist in einem Raum mit ungerader Nummer	Dieser Raum ist leer	Entweder ist Inschrift V richtig oder Inschrift VII ist falsch

IV	V	VI
Inschrift I ist falsch	Entweder ist Inschrift II oder IV richtig	Inschrift III ist falsch

VII	VIII	IX
Das Pferd ist nicht in Raum I	In diesem Raum ist ein Tiger und Raum IX ist leer	In diesem Raum ist ein Tiger und Inschrift VI ist falsch

Der Gefangene studiert das Problem und sagt ärgerlich: „Unfair, unlösbar!“
„Ja, ja“, amüsiert sich der König.
„Sehr lustig“, erwidert der Gefangene. „Könnten Sie, Herr König, mir nicht einen Tip geben: Ist Raum VIII leer oder nicht?“
Der König entsprach der Bitte, und der Gefangene fand die Freiheit.
In welchem Raum befand sich das Pferd?



1.2 Logische Gesetze

Wir hatten schon die Gelegenheit festzustellen (Aufg. 1.3), dass manche zusammengesetzte Aussagen unabhängig vom Wahrheitswert der Komponenten immer wahr sind.
Eine derartige Aussage nennen wir ein „logisches Gesetz“ oder eine „Tautologie“. Auch die folgenden sind solche Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} A & \Longrightarrow & A \\ (A \wedge B) & \Longrightarrow & A \\ (A \vee B) & \Longleftarrow & A \\ (\neg(\neg A)) & \Longleftrightarrow & A \end{array}$$

Wichtig sind noch folgende Gesetze:

(1) Kommutativität von „$\wedge$“ bzw. „$\vee$“.

$$\begin{array}{rcl} (A \wedge B) & \Longleftrightarrow & (B \wedge A) \\ (A \vee B) & \Longleftrightarrow & (B \vee A) \end{array}$$

(2) Assoziativität von „$\wedge$“ bzw. „$\vee$“.

$$\begin{array}{rcl} ((A \wedge B) \wedge C) & \Longleftrightarrow & (A \wedge (B \wedge C)) \\ ((A \vee B) \vee C) & \Longleftrightarrow & (A \vee (B \vee C)) \end{array}$$

Die Regeln in (1) und (2) kann man sich leicht verbal klarmachen.

(3) Distributivität für „$\wedge$“ und „$\vee$“.

$$\begin{array}{rcl} ((A \wedge B) \vee C) & \Longleftrightarrow & ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \\ ((A \vee B) \wedge C) & \Longleftrightarrow & ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \end{array}$$

1.7 Aufgabe. Überzeugen Sie sich von der zweiten Distributivitätsformel durch eine abgekürzte Wahrheitstafel:

A	B	C	$(A \vee B) \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
f	f	f		
f	f	w		
f	w	f		
f	w	w		
w	f	f		
w	f	w		
w	w	f		
w	w	w		

Diese Tautologien reißen uns sicher nicht vom Hocker. Ich hoffe, die folgenden tun es schon eher:

(4) Kontraposition.

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg B) \Longrightarrow (\neg A))$$

Wie immer kann man sich dies durch eine Wahrheitstafel klarmachen. Wir wollen aber – ohne uns zu sehr in formale Manipulationen zu verstricken –, wie folgt argumentieren: Die linke Seite der Äquivalenz ist per Definition $(\neg A) \vee B$, die rechte ist $((\neg(\neg B)) \vee (\neg A))$, diese ist äquivalent zu $B \vee (\neg A)$, also zu $(\neg A) \vee B$. Damit sind beide Seiten äquivalent.
(Entscheiden Sie, ob Ihnen diese Argumentation okay erscheint!).

Dieses Gesetz kommt beim mathematischen Schließen (aber auch im Alltag) sehr oft zum Tragen. Statt aus der Aussage A die Aussage B abzuleiten, ist es ebenso legitim, (und manchmal ist es sogar leichter) aus „nicht B“ die Aussage „nicht A“ zu folgern.

1.2 Beispiel: Gegeben zwei rationale Zahlen a, b. Dann gilt: $a + b \neq 0$ impliziert $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.
Das ist richtig, denn aus der Verneinung der rechten Seite (vergl. die folgende Regel), $a = 0$ und $b = 0$, folgt
$a + b = 0$, also die Verneinung der linken Seite.

(5) DeMorgan-Regeln.

$$\begin{array}{rcl}(\neg(A \wedge B)) & \Longleftrightarrow & ((\neg A) \vee (\neg B)) \\ (\neg(A \vee B)) & \Longleftrightarrow & ((\neg A) \wedge (\neg B))\end{array}$$

Wenn ich heute also das Versprechen, einzukaufen und zu kochen, nicht einhalten will, so tue ich eines von beiden oder beide nicht. Wenn ich das Versprechen, einzukaufen oder zu kochen, nicht einhalten will, darf ich beides nicht tun.

1.3 Das Dualitätsprinzip

Sehen wir uns doch mal folgende Argumentation an:

Die Aussage $(A \wedge B) \Longrightarrow A$ ist immer richtig, also auch $((\neg A) \wedge (\neg B)) \Longrightarrow (\neg A)$. Diese schreiben wir in der Form $(\neg(A \vee B)) \Longrightarrow (\neg A)$, also erhalten wir durch Kontraposition die immer richtige Aussage $A \Longrightarrow (A \vee B)$.

Dies hier angewandte Verfahren können wir ganz allgemein formulieren:

Dualitätsprinzip: Gegeben sei ein logisches Gesetz in Form einer Implikation $(\ldots) \Longrightarrow (\ldots)$, in welcher in den Klammern die Aussagen $A, B, C, \ldots$ nur mit „$\wedge, \vee, \neg$“ verknüpft sind, so erhält man ein neues Gesetz, indem man überall „$\wedge$“ durch „$\vee$“ und „$\vee$“ durch „$\wedge$“ ersetzt und den Implikationspfeil umdreht.

Liegt insbesondere die Tautologie in Form einer Äquivalenz vor, so erhalten wir durch die Ersetzungsvorschrift eine neue Äquivalenz.

Statt das Prinzip allgemein zu beweisen, wollen wir unser Verfahren an einem weiteren Beispiel demonstrieren:

Beginnen wir mit $((A \wedge B) \vee C) \Longleftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$ aus dem ersten Distributivitätsgesetz.
(Um nicht zuviele Klammern schreiben zu müssen, vereinbaren wir, dass „$\neg$“ am festesten bindet, d.h. $\neg A$ bedeutet $(\neg A)$).
Wir schreiben zuerst das Gesetz mit den negierten Aussagen nochmal auf:

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C) \Longleftrightarrow ((\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C)),$$

dann wenden wir die DeMorganformeln an:

$$((\neg(A \vee B) \vee \neg C)) \Longleftrightarrow (\neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C)),$$

und nochmal, um

$$(\neg((A \vee B) \wedge C)) \Longleftrightarrow (\neg((A \wedge C) \vee (B \wedge C)))$$

zu erhalten. Durch Kontraposition bekommen wir die Formel

$$((A \vee B) \wedge C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)\,,$$

die aus der ersten genau durch die Ersetzungsforschrift des Prinzips entsteht.

Wir bemerken also, dass das zweite Distributivgesetz sich aus dem ersten nach dem Dualitätsprinzip ergibt.

1.8 Aufgabe. Schreiben Sie die Formel von Aufg. 1.3 so hin, dass Sie das folgende Gesetz sofort nach dem Prinzip erhalten: $(\neg A \wedge C) \Longrightarrow ((\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C))$.

1.4 Quantoren

Betrachten wir folgende Formulierungen der Umgangssprache:
„In 2002 schien jeden Tag einmal die Sonne." Wir sind versucht zu widersprechen und sagen deshalb: „An wenigstens einem Tag von 2002 kam die Sonne nicht raus."
Welcher Art sind diese Aussagen: Es gibt einen Bereich B von Objekten und zu jedem b aus B (in Zeichen: $b \in B$) eine Aussage $A(b)$ über b. Wir können dann folgende Vereinbarungen treffen:

1.6 Definition. *Für alle.*
Die Aussage $\bigwedge\limits_{b \in B} A(b)$ (gelesen: „Für alle $b \in B$ gilt $A(b)$") trifft genau dann zu, wenn $A(b)$ für jedes $b \in B$ wahr ist.

Wir können $\bigwedge\limits_{b \in B} A(b)$ als eine Art Konjunktion all der Aussagen $A(b)$, $b \in B$, ansehen; daher kommt auch die Notation als vergrößertes „und"-Zeichen. Die „für alle"-Aussage ist also genau dann falsch, wenn $A(b)$ für wenigstens ein $b \in B$ falsch ist.

1.7 Definition. *Es existiert.*
Die Aussage $\bigvee\limits_{b \in B} A(b)$ (gelesen: es existiert ein $b \in B$ mit $A(b)$) ist genau dann wahr, wenn für wenigstens ein $b \in B$ die Aussage $A(b)$ wahr ist.

Wir können $\bigvee\limits_{b\in B} A(b)$ als eine Art Disjunktion all der Aussagen $A(b)$, $b \in B$, ansehen (daher wiederum die Notation als vergrößertes „oder"-Zeichen).

Damit haben wir auch gleich folgende Formeln als Verallgemeinerung der DeMorgan-Regeln von 1.2 (5):

$$\begin{aligned} \neg(\bigwedge_{b\in B} A(b)) &\iff (\bigvee_{b\in B} \neg A(b)) \\ \neg(\bigvee_{b\in B} A(b)) &\iff (\bigwedge_{b\in B} \neg A(b)) \end{aligned}$$

Die Symbole $\bigwedge$, $\bigvee$ heißen Quantoren. Für uns dienen sie der knappen Formulierung von Sachverhalten.

1.3 Beispiele: (1) Sei $\mathbb{Z}$ der Bereich der ganzen Zahlen. Dann können wir bilden:

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{Z}} (x \text{ ist durch 3 ohne Rest teilbar})$$

Okay, wir wissen, dass diese Behauptung falsch ist, denn

$$\bigvee_{x\in\mathbb{Z}} (x \text{ ist nicht ohne Rest durch 3 teilbar})$$

ist richtig, z.B. $x = 1$.

(2) Die Aussage „x ist durch 3 ohne Rest teilbar" können wir mit dem Quantor $\bigvee$ schreiben:

$$\bigvee_{q\in\mathbb{Z}} (x = 3q)$$

Die Behauptung in (1) nimmt also die Form

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{Z}} (\bigvee_{q\in\mathbb{Z}} 3q = x)$$

an.
(In einer Behauptung können offensichtlich mehrere Quantoren vorkommen).

1.9 Aufgabe. Sei $\mathbb{R}$ der Bereich der reellen Zahlen: Ist folgende Aussage wahr?

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \big(\bigwedge_{y\in\mathbb{R}} \big(\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} ny \text{ ist größer als } x\big)\big)\ .$$

Überzeugen Sie sich auch noch, dass die Aussage zu

$$\bigwedge_{y\in\mathbb{R}} \big(\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \big(\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} ny \text{ ist größer als } x\big)\big)$$

äquivalent ist, d.h. die beiden „für alle"-Quantoren vertauschen; also können wir auch abgekürzt schreiben:

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}} \big(\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} ny \text{ größer als } x\big)\,.$$

Anmerkungen: (1) Ist der Bereich B leer, dann ist eine Aussage $(\bigwedge_{b\in B} A(b))$, richtig, denn wir können sie auch so lesen: $\bigwedge_x (x \in B \Longrightarrow A(x))$, wobei x einen Fantasiebereich von Objekten durchläuft. Da „$x \in B$" falsch ist, ist $(x \in B) \Longrightarrow A(x)$ richtig. In diesem Falle ist also die Implikation $(\bigwedge_{b\in B} A(b)) \Longrightarrow (\bigvee_{b\in B} A(b))$ falsch.

(2) Als Bereiche B werden uns nach dem nächsten Kapitel immer Mengen dienen.

1.5 Weiterführende Literatur

Es sei nur eine Mini-Auswahl angegeben:

1. D. Hilbert und W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik. 6. Auflage, Springer-Verlag 1972.

2. W. Rautenberg: Einführung in die Mathematische Logik. Vieweg 1996.

2 Naive Mengenlehre

Wenn ich in der Alltagssprache sage, „Heute habe ich noch eine Menge zu tun“, so meint „Menge“ im Grunde nur „viel“. Wahrscheinlich wissen wir alle intuitiv dennoch, was eine „Menge“ sein soll. Ein gewisser Bedarf, den mathematischen Begriff „Menge“ zu klären, bleibt aber bestehen. Wir unterteilen dieses Kapitel wie folgt:

2.1 Präzisierung des Begriffs „Menge“

2.2 Konstruktion neuer Mengen

2.3 Mengentheoretische Operationen

2.4 Abbildungen

2.5 Mächtigkeit von Mengen

2.6 Literaturvorschläge

2.1 Präzisierung des Begriffs „Menge“

Unter einer Menge wollen wir eine genau definierte Kollektion unterschiedlicher mathematischer Objekte verstehen. Diese Kollektion ist dann ein neues mathematisches Objekt (verschieden von all ihren „Sammlungsgegenständen“). Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, formuliert es so:
„Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Als Objekte wollen wir aber nicht unsere Träume, Wünsche etc. zulassen, sondern nur handfeste – eben mathematische – Objekte, z.B. Zahlen, Funktionen und, so wir welche finden, auch Mengen.

2.1 Definition. *Element.*
Ist M eine Menge (Sammlung) und x eines der Objekte von M, so schreiben wir: $x \in M$ (in Worten: x Element von M).

Von jedem Objekt hat eindeutig festzustehen, ob es zur Sammlung M gehört, also ein Element der Sammlung ist oder nicht. Wohlgemerkt, das gleiche

Objekt kann natürlich in verschiedenen Mengen als Element fungieren: Z.B. kann mein Rembrandt zu meiner Sammlung von Kunstgegenständen gehören und zu meiner Sammlung holländischer Malerei.

2.1 Beispiele: (1) Sei M die Kollektion aller geraden ganzen Zahlen. Diese Menge schreiben wir auch in der Form $M = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, \ldots\}$ hin, wobei die Bedeutung der Pünktchen aus dem Kontext heraus klar sein muss.

(2) Die Menge $\{2\}$, die nur aus dem einen Element 2 besteht; oder entsprechend $\{2, 4, 5\}$, die Menge mit den Elementen $2, 4, 5$.

(3) Was ist mit $\{3, 3\}$? Da die Elemente wohlunterschieden zu sein haben interpretieren wir dies als $\{3\}$.

(4) Die leere Menge, bezeichnet mit $\varnothing$, ist die leere Kollektion. Z.B. ist meine Sammlung von Rembrandts tatsächlich leer, meine Fritz-König-Sammlung dagegen nicht.

2.2 Definition. *Teilmenge.*
Gegeben zwei Mengen M, N, so sagen wir $M \subset N$,(in Worten: M ist in N enthalten, oder N enthält M, oder auch noch: M ist Teilmenge von N) genau dann, wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist.
N.B. $M = N$ ist dabei erlaubt. Ist $M \subset N$ und $M \neq N$, so nennen wir M eine „echte Teilmenge von N“.

2.2 Beispiele: (1) $\{2\} \subset \{2, 4\} \subset \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$.

(2) Für jede Menge M gilt $M \subset M$. Ferner ist „$M \subset N$ und $N \subset M$“ äquivalent zu „$M = N$“.

(3) $M \subset N$ und $N \subset O$ impliziert $M \subset O$.

2.1 Aufgabe. Sei $M := \{1, 2\}$, $N := \{2, 3, 4\}$. Richtig oder falsch?

a) $M \subset N$, ?

b) $N \subset M$, ?

c) $M = N$, ?

d) $M \neq N$, ?

e) $\{2,4\} \subset N$,

f) $2 \in M$,

g) $3 \subset N$,

h) $\{2,\{3,4\}\} \subset N$.

2.2 Aufgabe. Richtig oder falsch?

a) $\{1,\{\varnothing\}\} \subset \{1,3,\{\varnothing\}\}$,

b) $\varnothing \subset \{1,3,\{\varnothing\}\}$,

c) $\{\varnothing\} \subset \{1,3,\{\varnothing\}\}$,

d) $\{\varnothing\} \in \{1,3,\{\varnothing\}\}$,

e) $\{1,3\} \subset \{1,3,\{1,3\}\}$,

f) $\{1,3\} \in \{1,3,\{1,3\}\}$.

2.3 Aufgabe. a) Geben Sie eine Menge A an, sodass gilt:

$$1 \in A \text{ und } \{1\} \in A\,.$$

b) Geben Sie jetzt für jede Menge M eine Menge A an mit $M \subset A$ und $M \in A$.

Nun noch zwei populäre Versionen der Probleme, in die wir geraten können, wenn wir nicht vorsichtig sind:

Das Barbierparadoxon

Auch dieses Rätsel ist vielen bekannt. In einer kleinen Stadt ist ein Barbier, der all die Einwohner der Stadt rasiert, die sich nicht selbst rasieren, und nie einen Einwohner rasiert hat, der sich selbst rasiert. Die Frage ist nun, rasiert der Barbier sich selbst oder nicht? Tut er es, dann verletzt er die Regel, weil er dann jemanden rasiert, der sich selbst rasiert. Tut er es nicht, dann verletzt er wieder die Regel, weil er es dann versäumt, jemanden zu rasieren, der sich nicht selbst rasiert. Was soll der Barbier also tun?

Sehr schön hat der polnische, in der Schweiz lehrende Logiker und Philosoph Joseph Maria Bocheǹski (*1902) die Probleme, wenn Mengen sich selbst als Element enthalten dürften, veranschaulicht.

Große Bibliotheken verfügen bekanntlich über Katalogbände, in denen alle Bücher registriert sind, welche die Bibliothek besitzt. Gelegentlich werden auch die Katalogbände selbst darin - in sich selbst also - mit-registriert. Es sind also Kataloge denkbar, die sich selbst registrieren, und solche, die das nicht tun. Angenommen nun, ein Katalogband, den wir K nennen, registriert alle Kataloge, die sich nicht selbst registrieren. Registriert K sich dann selbst oder nicht?

2.2 Konstruktion neuer Mengen

Wir kehren zunächst zum Begriff der Teilmenge einer Menge zurück. Wie können wir Teilmengen beschreiben?

2.3 Definition. Sei N eine Menge und für jedes Element $x \in N$ sei $A(x)$ eine Aussage über x, die eines von beiden ist, wahr oder falsch. Dann sei $M := \{x \in M \mid A(x)\}$ die Menge aller Elemente x von N, für die $A(x)$ wahr ist; insbesondere ist M also eine Teilmenge von N. (Das Zeichen „:=“ bedeutet „per Definition gleich“).

Ist uns eine Teilmenge P von N vorgegeben, so können wir für $A(x)$ die Aussage „$x \in P$“ nehmen und erhalten P bei Anwendung der Konstruktion zurück.

2.3 Beispiel: Wir haben das Verfahren schon in 2.1 Beispiel (4) angewendet, indem wir $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$ gebildet haben (wobei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet).

Um alle „möglichen“ Teilmengen von N zu bekommen, könnten wir wie folgt vorgehen: Wir besuchen alle Elemente von N; gefällt uns ein Element, so stecken wir ihm ein Fähnchen an, wenn nicht, eben nicht. Danach bilden wir $\{x \in N \mid x \text{ hat Fähnchen}\}$. (Dieses Vorgehen erinnert ein bißchen an die Methode, wie die großen Sammlungen antiker Kunst im Okzident entstanden sind: Der Eroberer geht vorbei und entscheidet was mitkommt).

2.4 Definition. *Potenzmenge.*
Sei M eine Menge. Dann sei die Potenzmenge von M (in Zeichen: $\mathcal{P}(M)$) die Menge aller Teilmengen von M.

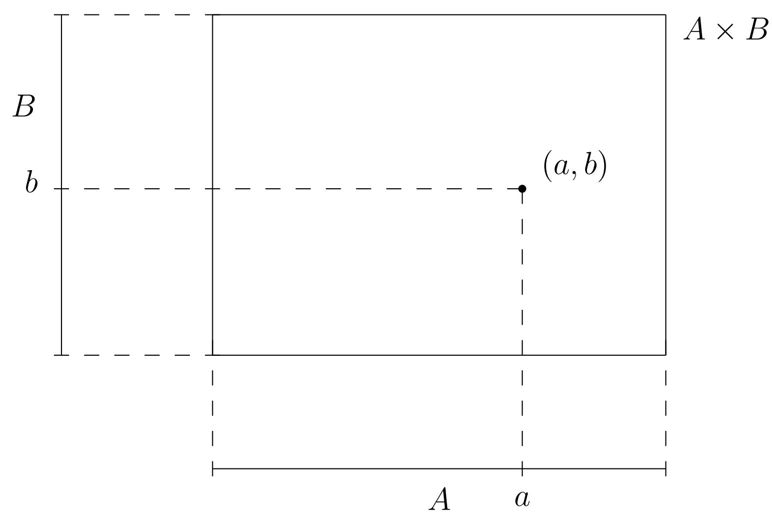
2.4 Beispiel: Für $M = \varnothing$ ist $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing\}$.

$$\begin{array}{lclllcl} M & = & \{1\}\,, & & \mathcal{P}(M) & = & \{\varnothing, \{1\}\}\,, \\ M & = & \{1,2\}\,, & & \mathcal{P}(M) & = & \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\,. \end{array}$$

2.4 Aufgabe. Und wieviele Elemente hat $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$?

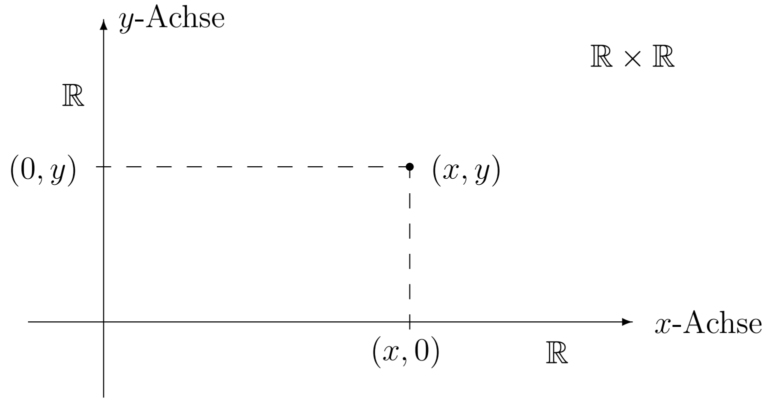
2.5 Definition. *Cartesisches Produkt von Mengen.*
Gegeben seien zwei Mengen M und N. Dann ist ihr cartesisches Produkt $M \times N$ die Menge aller geordneten 2-Tupel (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$, also $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M,\, y \in N\}$.

Wir wollen uns $A \times B$ wie folgt veranschaulichen:



2.5 Beispiel: Berühmt ist, und dürfte Ihnen allen bekannt sein, die cartesische Koordinatenebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (zur Erinnerung: $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen).

Übliche Veranschaulichung der cartesischen Ebene:



Die x-Achse ist $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und die y-Achse ist $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir sehen hier die Faktoren in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf kanonische Weise als Achsen an.

Die Konstruktion war aber schon den Piraten bekannt, wie man an den Schatzkarten sehen kann: Große Palme, dann $(12, 7)$, soll heißen: Der Schatz liegt 12 Schritte von der großen Palme nach Osten und dann 7 Schritte nach Südwesten (Pech für den, der 7 Schritte nach Norden macht).

2.6 Beispiel: Was ist $\{a, b, \dots, h\} \times \{1, 2, \dots, 8\}$?

Bemerkung: Wenn wir drei Mengen M, N, P gegeben haben, dann können wir $(M \times N) \times P$ bilden, oder $M \times (N \times P)$, oder wir könnten gleich die Menge $M \times N \times P$ bestehend aus allen geordneten Tripeln (x, y, z) mit $x \in M$, $y \in N$, $z \in P$ konstruieren. Der Unterschied zwischen den drei Mengen sieht wohl nicht gravierend aus, wir werden darauf in 2.4 zurückkommen.

2.5 Aufgabe. Seien $A \subset M$, $B \subset N$; überlegen sie, ob $A \times B \subset M \times N$ richtig ist.

2.6 Aufgabe. Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

(i) $\{(x, y) \mid xy = 0\}$,

(ii) $\{(x, y) \mid xy - x = 0\}$,

(iii) für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ die Menge $\{(x, y) \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$,

(iv) $\{(x, y) \mid \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} x - y = n\}$.

2.3 Mengentheoretische Operationen

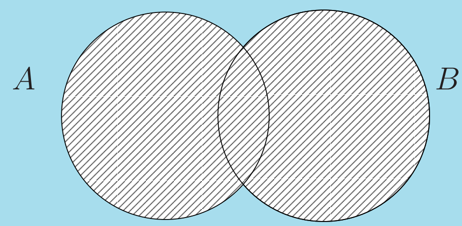
Für das folgende stellen wir uns vor, dass alle betrachteten Mengen $A, B, C, \dots$ Teilmengen einer „großen“ Menge X sind.

2.6 Definition. Seien A, B Mengen (d.h. Teilmengen von X). Dann vereinbaren wir die folgenden „mengentheoretischen Operationen“:

(1) Die „Vereinigung von A und B“ (oder auch „A vereinigt B“) ist die Menge

$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}\,.$$

Illustration:

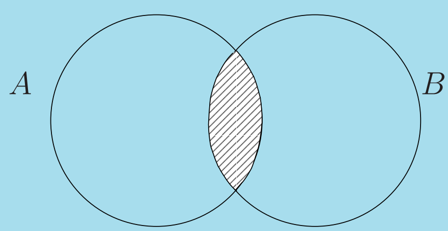


$A \cup B$ schraffiert

(2) Der „Durchschnitt von A und B“ (oder „A geschnitten B“) ist

$$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}\,.$$

Illustration:

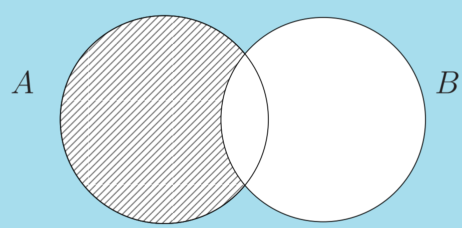


$A \cap B$ schraffiert

(3) Die „Differenz von A und B“ ist

$$A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}\,.$$

Illustration:



$A \setminus B$ schraffiert

(4) Die Differenz $X \setminus A$ nennen wir das Komplement von A (in X).

2.7 Aufgabe. Zeigen Sie, dass $A \smallsetminus B = A \cap (X \smallsetminus B)$ gilt.

2.8 Aufgabe. Bestimmen Sie

(a) $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}$,

(b) $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}$,

(c) $\{1, 2, 3\} \smallsetminus \{2, 3, 4\}$.

2.9 Aufgabe. Sei $M := \{p \mid p \text{ Primzahl}, 1 < p < 10\}$ und sei L die Menge der geraden natürlichen Zahlen, also $L := \{0, 2, 4, \ldots\}$.

(a) Schreiben Sie die Menge M auf, indem Sie alle ihre Elemente zwischen Mengenklammern aufzählen.

(b) Schreiben Sie so auch
$\{1, 2, \ldots, 10\} \smallsetminus M$ und

(c) $\{1, 2, \ldots, 10\} \smallsetminus (M \cup L)$ auf.

Die Ähnlichkeit der Zeichen $\vee, \cup$, sowie der Zeichen $\wedge, \cap$ und $\neg, \smallsetminus$ (letztere ist zugegebermaßen weit hergeholt) mag als Merkhilfe dienen. Wir können jedoch noch weiter gehen und einen starken inhaltlichen Zusammenhang wie folgt konstruieren:
Seien also $A, B, C, \ldots$ Mengen, und die Mengen M, N seien beide aus $A, B, C, \ldots$ durch Anwenden von Vereinigung, Durchschnitt und Komplement gebildet, sodass $M \subset N$ (oder $M = N$) gilt und zwar unabhängig von der Wahl der Ausgangsmengen $A, B, C, \ldots$ Eine solche Beziehung $M \subset N$ (bzw. $M = N$) wollen wir eine mengentheoretische Formel nennen.

2.7 Beispiel: $(A \cap B) \subset A$, ferner $X \smallsetminus (X \smallsetminus A) = A$.

Wir behaupten nun, dass wir auf einfache Weise aus jedem logischen Gesetz (vergl. 1.2) eine mengentheoretische Formel erhalten können und umgekehrt. Das geht so: Gegeben ein logisches Gesetz der Form

$$(\#) \Longrightarrow (\#\#)$$

wo in den Klammern Aussagen $A, B, C, \ldots$ durch die logischen Verknüpfungen „und“, „oder“ und „nicht“ verbunden sind. Wir denken uns $A, B, C, \ldots$ nun als Mengen und ersetzen $\vee$ durch $\cup$, $\wedge$ durch $\cap$ und $\neg$ durch $(X \setminus -)$ und die Implikation durch „enthalten“, damit haben wir eine mengentheoretische Formel. Umgekehrt machen wir das entsprechend.

2.8 Beispiele:

$A \iff A$	$A = A$
$(A \wedge B) \Longrightarrow A$	$(A \cap B) \subset A$
$A \Longrightarrow (A \vee B)$	$A \subset (A \cup B)$
$\neg(\neg A) \iff A$	$(X \setminus (X \setminus A) = A$

Warum funktioniert das?
Es würde uns an dieser Stelle zu sehr ablenken, eine ganz formale Begründung dieses Prinzips zu geben. Betrachten wir lieber ein weiteres – komplizierteres – Beispiel.

Wir möchten für die mengentheoretischen Operationen das Distributivgesetz

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

beweisen, d.h. wir haben zu zeigen, $x \in ((A \cap B) \cup C) \iff x \in ((A \cup C) \cap (B \cup C))$ für $x \in X$. Nun ist $x \in ((A \cap B) \cup C)$ äquivalent zu $(x \in (A \cap B)) \vee (x \in C)$, und diese Aussage ist äquivalent zu $((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee (x \in C)$. Nach dem Distributivgesetz der Aussagenlogik (vergl. 1.2(3)) ist dies äquivalent zu $((x \in A) \vee (x \in C)) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$, dies formulieren wir nun äquivalent zu $(x \in (A \cup C)) \cap (x \in (B \cup C))$ um und weiter zu $x \in ((A \cup C) \cap (B \cup C))$, wo wir ja hinkommen wollten.

Auf entsprechende Weise ergeben die Gesetze von 1.2 die folgenden mengentheoretischen Formeln:

(1) Kommutativität von „$\cap$“ bzw. „$\cup$“.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

(2) Assoziativität von „$\cap$“ bzw „$\cup$“.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(3) Distributivität von „$\cap$“ und „$\cup$“.

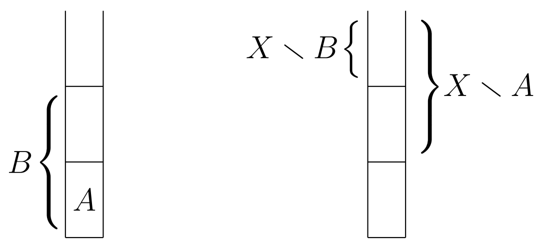
$$((A \cap B) \cup C) = ((A \cup C) \cap (B \cup C))$$
$$((A \cup B) \cap C) = ((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

(4) Unser Übersetzungsmechanismus funktioniert auch für die Kontraposition, bringt da jedoch nur die Gleichheit von $(X \setminus A) \cup B$ und $(X \setminus (X \setminus B)) \cup (X \setminus A)$.

Wir können jedoch auch ein wenig anders übersetzen:

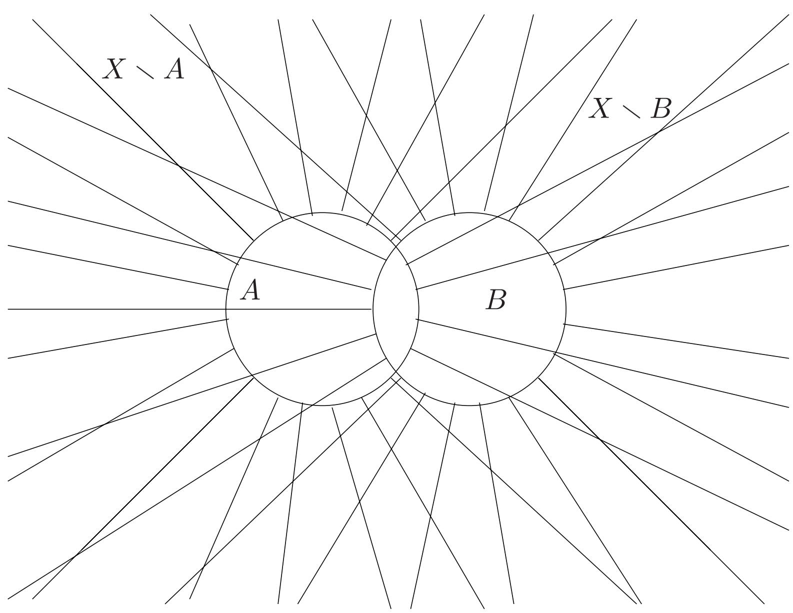
$$(A \subset B) \Longleftrightarrow ((X \setminus B) \subset (X \setminus A))$$

Illustration:

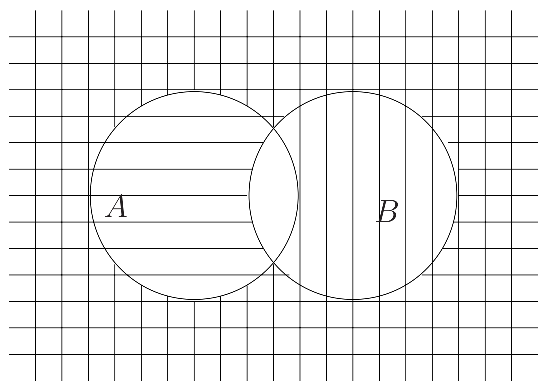


(5) Die Formeln von DeMorgan (übersetzt):

Erste Formel: $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$



Zweite Formel: $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$



Bemerkung: Der Übersetzungsvorgang läßt aus dem Dualitätsprinzip der Aussagenlogik in 1.3 ein Dualitätsprinzip für mengentheoretische Formeln entstehen. Z.B. entsteht $A \cap B \subset A$ auf diese Weise aus $A \cup B \supset A$.

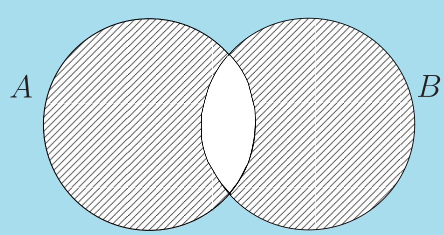
2.10 Aufgabe. Zeigen Sie direkt, d.h. ohne große Übersetzungstheorien, die folgenden beiden Aussagen über Mengen:

$$A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B\,, \quad A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A$$

Noch die Aufgabe 11?

2.11 Aufgabe. Dies ist ein längeres Stück Arbeit. Wir wollen den Übersetzungsmechanismus an einem weiteren Beispiel demonstrieren. Zuerst eine Vereinbarung:

2.7 Definition. Seien A, B Mengen. Dann sei $A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, die sogenannte „symmetrische Differenz“ von A und B.

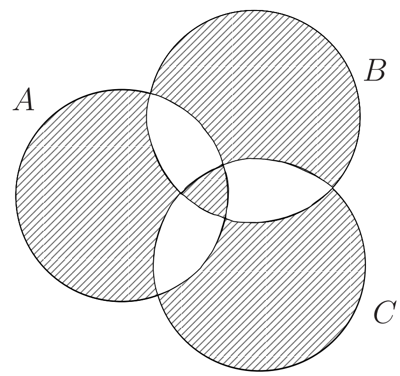


(i) Bemerken Sie, dass $A \oplus B = (A \cap (X \setminus B)) \cup (B \cap (X \setminus A))$ gilt.

(ii) Übersetzen Sie nun die rechte Seite in eine logische Verknüpfung von Aussagen! Sie erhalten das „ausschließliche oder“, oder ?

(iii) Beweisen Sie nun das Assoziativgesetz für die symmetrische Differenz, d.h. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ für alle Mengen A, B, C, indem Sie die Assoziativität des „ausschließlichen oder“ mit einer Wahrheitstafel verifizieren.

(iv) Machen Sie sich anschaulich klar, aus welchen „Stücken“ $(A \oplus B) \oplus C$ besteht:



Sie haben herausgefunden, dass $(A \oplus B) \oplus C = (A \cap (X \setminus (B \cup C)) \cup (B \cap (X \setminus (A \cup C)) \cup (C \cap (X \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$ ist?

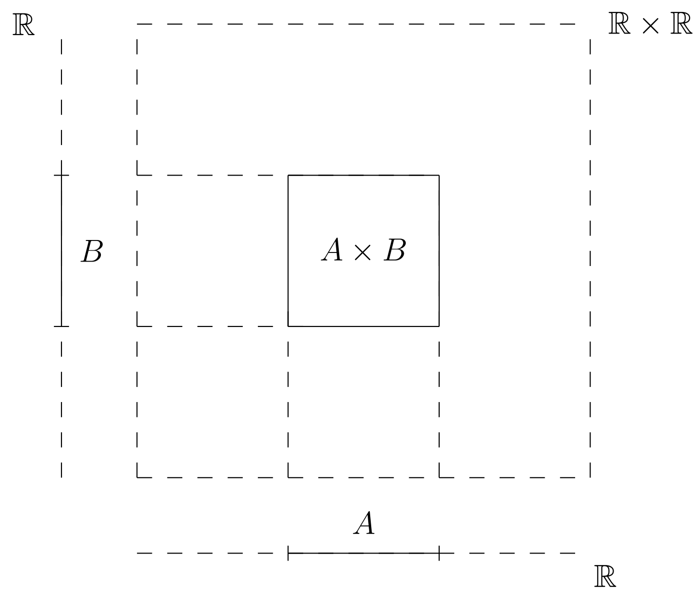
(v) Nun können Sie sich - leicht - direkt mengentheoretisch vom Assoziativgesetz der symmetrischen Differenz überzeugen.

2.12 Aufgabe. Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Welche der folgenden Mengen ist gleich $(X \times Y) \setminus (A \times B)$?

(a) $(X \setminus A) \times (Y \setminus B)$,

(b) $((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$.

Entscheiden Sie an Hand einer Zeichnung in der cartesischen Koordinatenebene:

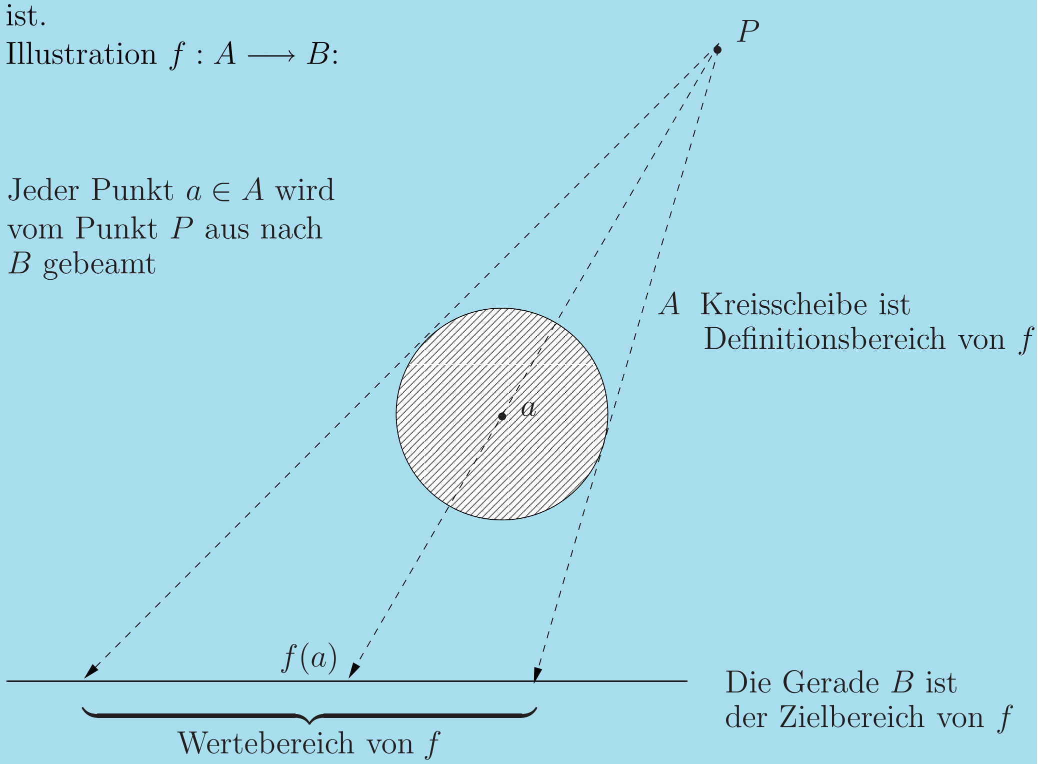


Schraffieren Sie $(\mathbb{R} \setminus A) \times (\mathbb{R} \setminus B)$!

2.4 Abbildungen

Jetzt haben wir ein Konzept zu diskutieren, das zusammen mit dem Begriff der „Menge“ allgegenwärtig ist in der Mathematik. Erfahrungsgemäß fällt der Abstraktionsgrad, den wir hier aufbieten, den noch nicht Eingeweihten nicht gerade leicht. Am besten ist es zu versuchen, sich hier und jetzt damit auseinanderzusetzen.

2.8 Definition. *Abbildung, Funktion.*
Seien A, B Mengen. Eine Abbildung (oder eine Funktion) von A nach B ist eine Vorschrift $f : A \longrightarrow B, a \mapsto f(a)$, die jedem Element $a \in A$ ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.
Die Menge A heißt „Definitionsbereich“, die Menge B „Zielbereich“ von f. Das Element $f(a)$ heißt Bild von a unter f (oder Wert von f in a). Die Menge $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ nennen wir das Bild von f bzw. den Wertebereich von f.
(Man kann sich f als eine Art von Beamer oder Zeiger vorstellen, der von jedem Element $a \in A$ auf das Element $f(a) \in B$ zeigt). Das Wort „Funktion“ wird vor allem dann benutzt, wenn B die Menge der reellen Zahlen ist.
Illustration $f : A \longrightarrow B$:



Zunächst seien ein paar Ihnen eher ungewohnte Beispiele angeführt, danach gehen wir auf die Ihnen wohlbekannten Funktionen ein.

2.9 Beispiele: (1) Sei A eine Teilmenge von B. Die Inklusion $A \subset B$ definiert dann eine Abbildung $i : A \longrightarrow B$, $a \mapsto a$, d.h. $i(a) := a$; diese

Abbildung nennen wir die Inklusionsabbildung.
Ist $A = B$ so nennen wir die Inklusionsabbildung von A nach B die Identität von A (in Zeichen id_A).
Ist $A = \varnothing$, so treffen wir die Übereinkunft, dass es genau eine Abbildung $A \longrightarrow B$ gibt.

(2) Seien A, B Mengen und $A, B \neq \varnothing$. Wähle $b \in B$ fest und definiere $c_b : A \longrightarrow B$, $a \mapsto b$. Das ist die konstante Abbildung $A \longrightarrow B$ mit dem konstanten Wert b.

(3) Sei A eine Menge, $A \neq \varnothing$, und $\mathcal{P}(A)$ deren Potenzmenge. Dann können wir festlegen: $j : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, $a \mapsto \{a\}$, also $j(a) := \{a\}$.

(4) Sei $A \neq \varnothing$ und $a_0 \in A$ fest gewählt. Dann setzen wir $k : \mathcal{P}(A) \longrightarrow A$ fest durch die Vorschrift

$$k(M) := \begin{cases} a & \text{falls } M = \{a\}\,, \\ a_0 & \text{für alle anderen } M \subset A\,. \end{cases}$$

2.10 Beispiele: (Übliche) Funktionen:
Für a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sei das Intervall $[a, b]$ definiert als $\{t \mid a \leq t \leq b\}$. Dann betrachten wir Funktionen $f_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $[a, b]$.

(a) $f_1(x) = x$, d.h. f ist die Inklusionsabbildung zu $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(b) $f_2(x) = x^2$,

(c) $f_3(x) = \sin(x)$,

etcetera.

Wir können auch Funktionen in zwei Variablen betrachten. Seien dazu $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ Intervalle in $\mathbb{R}$, dann sind folgendes Beispiele für Funktionen $g_i : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.11 Beispiele:

(a) $g_1(x, y) = xy$,

(b) $g_2(x, y) = y \sin(x)$,

(c) $g_3(x,y) = (1/\cos(x))^{27}\sin(y)$, wobei diese Formel nur in dem Falle angebracht ist, dass cos keine Nullstelle in dem Intervall $[a_1, b_1]$ hat.

2.12 Beispiel: Ist A endlich, z.B. $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ und B eine nichtleere Menge, so können wir eine Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow B$ dadurch angeben, dass wir die Bilder b_i von $i = 1, 2, \ldots, n$ auflisten, am besten in der Form $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ b_1 & b_2 & b_3 & & b_n \end{pmatrix}$, soll heißen $f(i) = b_i$.

Sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{1, 2, 3\}$, dann definiert das Symbol

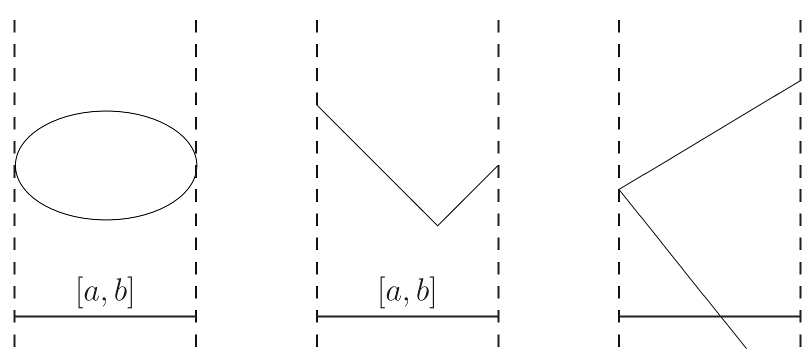
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Abbildung $f : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$. Welches ist der Wertebereich dieser Abbildung?

2.9 Definition. *Graph einer Abbildung.*
Für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ sei $G(f) := \{(a,b) \mid b = f(a)\} \subset A \times B$, der Graph von f.

2.13 Aufgabe. (a) Zeichnen Sie die Graphen der Beispiele 2.10

(b) Welche der folgenden Teilmengen von $[a,b] \times \mathbb{R}$ sind Graph einer Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$?



(a) (b) (c)

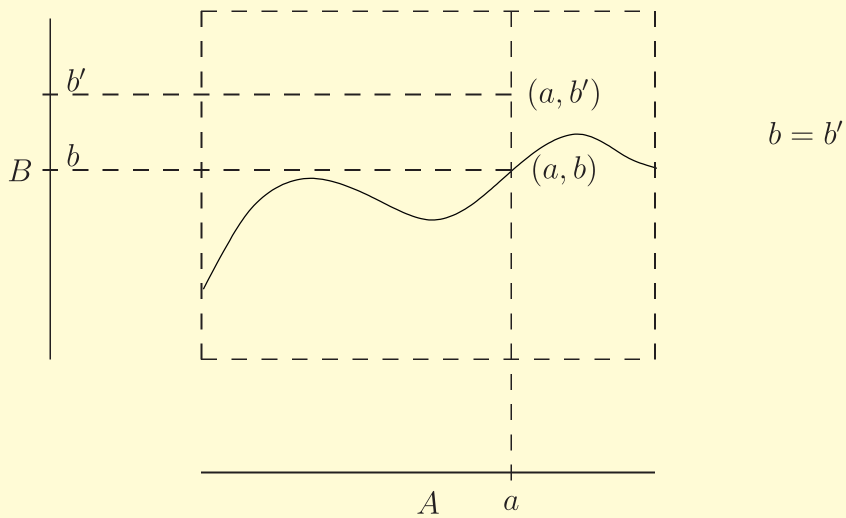
Wir wollen nun allgemein formulieren, wann eine Teilmenge $G \subset A \times B$ Graph einer Abbildung $f : A \longrightarrow B$ ist. Das ist uns so wichtig, dass wir dies zu unserem ersten Satz machen:

2.1 Satz. *Es ist $G \subset A \times B$ Graph einer Abbildung $f : A \longrightarrow B$ genau dann, wenn die beiden folgenden Eigenschaften für G erfüllt sind:*

(i) $\bigwedge_{a \in A} \bigvee_{b \in B} (a, b) \in G,$

(ii) $\bigwedge_{a \in A} \bigwedge_{b, b' \in B} ((a, b) \in G \text{ und } (a, b') \in G) \Longrightarrow b = b'.$

Illustration:



Beweis: Da „genau dann, wenn“ eine Umschreibung für „äquivalent“ ist, haben wir zwei Implikationen zu zeigen: (I) Ist G ein Graph, so gelten (i) und (ii) für G. (II) Gegeben G mit den Eigenschaften (i), (ii), dann können wir eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ finden mit $G = \operatorname{Graph}(f)$.
(I) Ist $G = \operatorname{Graph}(f)$, dann ist für $a \in A$ $(a, f(a)) \in G$, also gilt (i). Sind (a, b) und $(a, b') \in G$, so ist $b = f(a) = b'$ nach Definition des Graphen. Also gilt (ii).
(II) Sei $G \subset A \times B$ eine Teilmenge, welche die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Wegen (i) gibt es dann für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$. Damit sind wir versucht, eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ mit der Vorschrift

$$a \mapsto (\text{dasjenige } b \in B \text{ mit } (a, b) \in G)$$

zu definieren. Das klappt auch, da es wegen (ii) für ein $a \in A$ nur ein solches b mit $(a, b) \in G$ gibt, der Ausdruck „dasjenige“ also völlig korrekt gewählt war. Per Definition ist dann $G = \operatorname{Graph}(f)$. $\square$

2.10 Definition. *Injektiv, surjektiv, bijektiv.*
(1) Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt „injektiv“ genau dann, wenn gilt:

$$\bigwedge_{a_1, a_2 \in A} f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2 \,.$$

Mit Hilfe der Kontraposition ausgedrückt: Verschiedene Elemente von A haben verschiedene Werte unter f.
(2) Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt „surjektiv“ genau dann, wenn gilt:

$$\bigwedge_{b \in B} \bigvee_{a \in A} f(a) = b$$

d.h. Jedes Element im Zielbereich ist auch ein Wert der Funktion (der Zielbereich ist gleich dem Wertebereich).
(3) Eine Abbildung heißt „bijektiv“ genau dann, wenn sie injektiv und surjektiv ist.
Eine injektive Abbildung nennen wir auch eine „Injektion“, eine surjektive auch „Surjektion“ und eine bijektive auch „Bijektion“.

2.14 Aufgabe. Gehen wir zu den Beispielen 2.9. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(i) Eine Inklusionsabbildung ist immer injektiv.

(ii) Eine Inklusionsabbildung ist nie surjektiv.

(iii) Eine konstante Abbildung ist niemals injektiv.

(iv) Eine konstante Abbildung kann auch mal surjektiv sein.

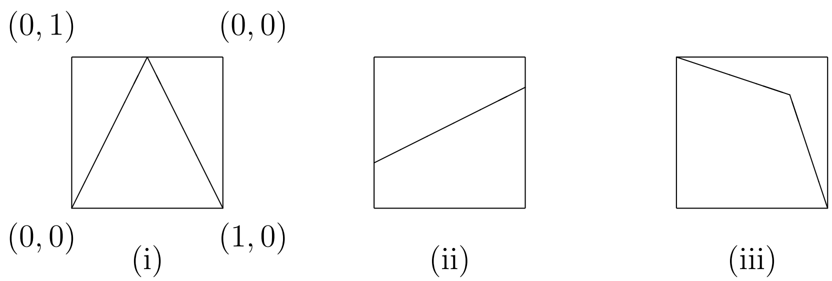
(v) Die Abbildung j (von Beispiele 2.9 (3)) ist injektiv.

(vi) Die Abbildung j ist niemals surjektiv.

(vii) Die Abbildung k (von 2.9 (4)) ist surjektiv.

(viii) Die Abbildung k kann auch mal injektiv sein.

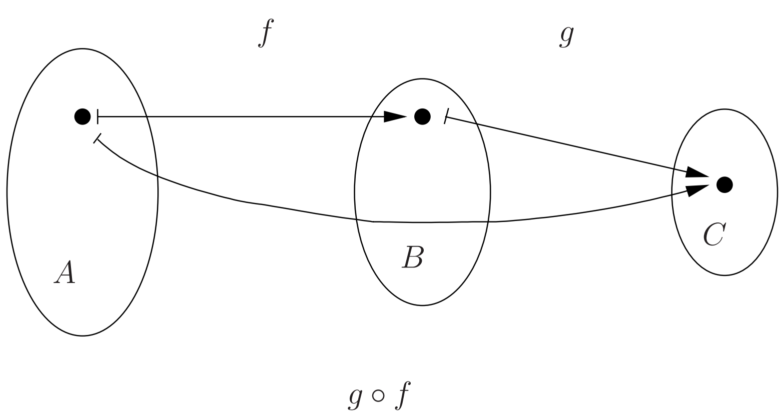
2.15 Aufgabe. Die Eigenschaften „injektiv, surjektiv, bijektiv“ können wir sicher auch am Graphen einer Abbildung ablesen. Hier sehen Sie drei Graphen von Abbildungen $[0,1] \longrightarrow [0,1]$.



Entscheiden Sie, welcher zu einer injektiven, surjektiven, bijektiven Abbildung gehört.

2.16 Aufgabe. Schreiben Sie alle Bijektionen $\{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$ in der Notation von Beispiel 2.10 hin.
Wieviele sind es?

2.11 Definition. *Komposition von Abbildungen.*
Gegeben die Abbildungen $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, dann definieren wir eine Abbildung $(g \circ f) : A \longrightarrow C$ durch die Vorschrift $a \mapsto g(f(a))$. Wir nennen sie die „Komposition“ von g und f. (Ein Element a aus A wird mit dem Beamer f zuerst nach B gebeamt und das Ergebnis anschlließend mit dem Beamer g nach C).



2.13 Beispiele: Vom Rechnen mit Funktionen sollte Ihnen dieses Vorgehen als Einsetzen bekannt sein:

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \sin(y)$, dann ist $(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$.
In diesem besonderen Falle können wir auch $f \circ g$ bilden, $(f \circ g)(x) = (\sin(x))^2$. Wir sehen, dass jedenfalls $g \circ f \neq f \circ g$ ist.

2.17 Aufgabe. Berechnen Sie im Kontext von Beispiel 2.12 die Komposition von $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ mit $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; und nun auch noch $f \circ g$, nur um nochmal zu sehen, dass, falls man $g \circ f$ und $f \circ g$ beide bilden kann, i.a. keine Gleichheit besteht.

Betonen wir nochmal, dass wir g mit f komponieren können, wenn der Zielbereich von f gleich dem Definitionsbereich von g ist. Nun können wir versuchen – unter geeigneten Bedingungen – mehrere Abbildungen zu komponieren oder, wie man sagt, hintereinanderzuschalten.

2.2 Satz. *Gegeben seien die Abbildungen $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ und $h : C \longrightarrow D$. Dann gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

als Abbildung von A nach D.

Beweis: Wir haben uns klarzumachen, dass für jedes Element $a \in A$ die Abbildung $h \circ (g \circ f)$ in a denselben Wert (aus D) hat wie die Abbildung $(h \circ g) \circ f$.

In der wenig akademischen Beamer-Sprechweise sehen wir das leicht ein:
Wie berechnen wir $(h \circ (g \circ f))(a)$? Wir beamen zuerst a nach $(g \circ f)(a)$ in C, nach Definition des Beamers $g \circ f$ erhalten wir $g(f(a))$, anschließend beamen wir $g(f(a))$ mit h nach D und erhalten $h((g(f(a)))$.

Formelmäßig sieht diese Argumentation wie folgt aus: $(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$.

So finden wir dann auch $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$. $\square$

Bemerkung. Allgemeines Assoziativgesetz.

Angenommen wir haben noch eine weitere Abbildung $i : D \longrightarrow E$, dann können wir z.B. $(i \circ h) \circ (g \circ f)$ und $i \circ ((h \circ g) \circ f)$ bilden; sind die beiden

Abbildungen $A \longrightarrow E$ gleich? Ja, denn nach obigem „einfachen Assoziativgesetz“ können wir $(i \circ h) \circ (g \circ f) = i \circ (h \circ (g \circ f)) = i \circ ((h \circ g) \circ f)$ rechnen. Wenn wir also mehrere Abbildungen vermöge geeigneter Klammerung hintereinanderschalten, so hängt das Resultat eben nicht von der Klammerung ab. Dies ist das „allgemeine Assoziativgesetz“, welches man ganz formal aus dem einfachen Assoziativgesetz ableiten könnte. Das zu tun, würde uns an dieser Stelle nichts außer Mühsal bringen, wir überlassen es getrost späteren (Algebra-)Vorlesungen. In jedem konkreten Fall wissen wir ja, was Sache ist.

Dieses Phänomen tritt selbstverständlich bei jeder Verknüpfung auf, die dem einfachen Assoziativgesetz genügt, z.B. dem mengentheoretischen Durchschnitt. Wir können Mengen $A, \ldots, A_n$ schneiden, indem wir $(\ldots((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \ldots \cap A_n)$ bilden, jedoch führt eine andere korrekte Klammerung zum selben Resultat.

Entsprechendes gilt auch für die Vereinigung und z.B. auch für die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$. Hier sei nochmal betont, dass jedoch das Hintereinanderschalten von Abbildungen i.a. weit davon entfernt ist, kommutativ zu sein.

Besonders interessant kann das Iterieren derselben Abbildung sein:

2.12 Definition. *Iterieren.*
Gegeben eine Abbildung $f : X \longrightarrow X$. Dann setzen wir für eine natürliche Zahl n

$$f^n := \begin{cases} \mathrm{id} & \text{für } n = 0\,. \\ \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-mal} & \text{für } n \geq 1\,, \end{cases}$$

2.14 Beispiel: Sei also $\mathbb{N}$ wieder die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} x/2 & \text{falls } x \text{ gerade,} \\ x+1 & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir behaupten dann, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eine natürliche Zahl k existiert mit $g^k(n) = 1$. (Den Beweis stellen wir als Aufgabe im nächsten Kapitel, nachdem wir die geeignete Technik erfahren haben).

2.18 Aufgabe. Welches ist die kleinste Zahl k mit $g^k(23) = 1$?

Bemerkung: Die Abbildung g hat man betrachtet, um ihre einfachen Eigenschaften den komplizierteren der Abbildung im $(3x+1)$-Problem gegenüberzustellen.

Das $(3x+1)$-Problem:

Man definiere $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$x \mapsto \begin{cases} 3x+1 & \text{falls } x \text{ ungerade,} \\ x/2 & \text{falls } x \text{ gerade.} \end{cases}$$

Immer noch ungelöst ist die Frage, ob die Aussage

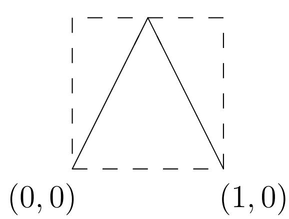
$$\bigwedge_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n>0}} \bigvee_{k\in\mathbb{N}} h^k(n) = 1$$

richtig ist.

2.19 Aufgabe. Welches ist die kleinste Zahl k mit

$$h^k(23) = 1\ ?$$

2.20 Aufgabe. Sei $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ diejenige Funktion mit dem Graphen



Wie sehen dann die Graphen von $f^2, f^3, \ldots$ aus? Wieviele Zähne hat insbesondere der Graph von f^5 ?

Noch die Aufgaben 2.21 und 2.22 ?

Wir sollten uns noch ein wenig mit Bijektionen beschäftigen.

2.21 Aufgabe. Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Bijektion. Dann gibt es genau eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Hinweis: Zu jedem $b \in B$ gibt es ein einziges $a \in A$ mit $f(a) = b$, also setzen wir $g(b)$ als dasjenige a mit $f(a) = b$ fest. Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gilt.

2.13 Definition. Die Abbildung g heißt Umkehrabbildung von f.

2.15 Beispiel: Sei $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (bzw. $\mathbb{R}_{>0}$) die Menge der reellen Zahlen ≥ 0 (bzw. > 0). Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$, dann ist f bijektiv und die Umkehrabbildung ist die Wurzelfunktion.

Ein anderes Beispiel ist die Exponentialfunktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto e^x$, mit der Umkehrfunktion $\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$.

Versuchen Sie noch andere „berühmte“ Beispiele in Ihrem Repertoire zu finden.

2.22 Aufgabe. Seien $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ Abbildungen.

(i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(iii) Sei $h : B \longrightarrow A$ eine Abbildung mit $h \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ h = \mathrm{id}_B$, dann ist f bijektiv und h die Umkehrabbildung.

(iv) Überlegen Sie in folgendem konkreten Falle, dass f eine Bijektion ist, indem Sie die Umkehrabbildung angeben: Seien $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ die Mengen der natürlichen Zahlen bzw. ganzen Zahlen. Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ durch die Formel

$$f(i) := \begin{cases} i/2 & \text{für } i \text{ gerade,} \\ -(i+1)/2 & \text{für } i \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definiert. Gesucht ist also die Umkehrabbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Bemerkung: Wir wollen zuletzt noch auf die Bemerkung am Ende von 2.2 eingehen. Seien die Mengen X, Y, Z gegeben, wir fragten, wie „verschieden“ die Mengen $(X \times Y) \times Z$ und $X \times (Y \times Z)$ (bzw. $X \times Y \times Z$) sind. Nun stellen wir fest, dass es die offensichtlichen Bijektionen

$$(X \times Y) \times Z \longrightarrow X \times (Y \times Z)\,, \quad ((x,y),z) \mapsto (x,(y,z))\,,$$

$$(X \times Y) \times Z \longrightarrow X \times Y \times Z\,, \quad ((x,y),z) \mapsto (x,y,z)\,,$$

gibt. Deswegen liegt es nahe diese Mengen als „gleich“ anzusehen.

2.5 Vergleich von Mengen

Wir wollen uns noch ein wenig mit der Frage beschäftigen, was es bedeuten könnte, dass zwei Mengen gleich viele Elemente haben oder die eine Menge „mehr“ Elemente als die andere hat.

2.14 Definition. Die Mengen X, Y heißen gleichmächtig (oder von gleicher Mächtigkeit) genau dann, wenn es eine Bijektion $X \longrightarrow Y$ gibt. (NB. Dann gibt es nach Aufgabe 2.21 auch eine Bijektion $Y \longrightarrow X$).

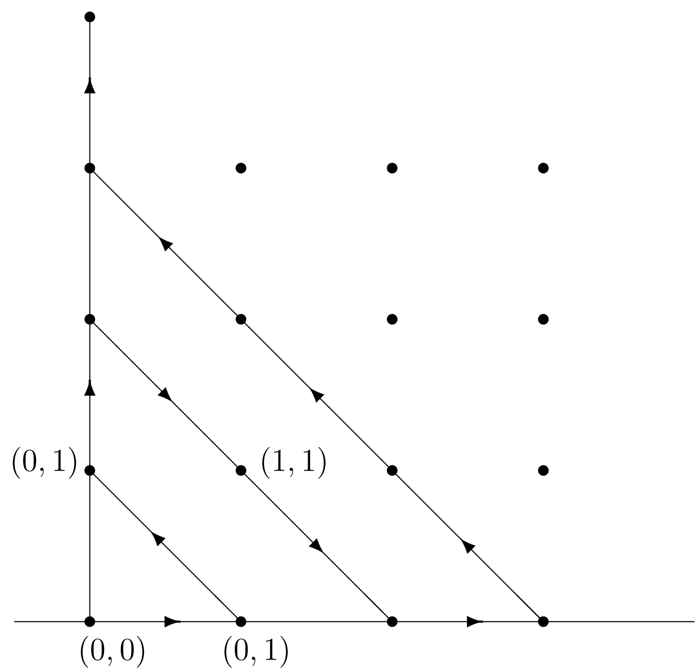
Wenn X, Y endliche Mengen sind (d.h. endlich viele Elemente haben), dann wissen wir, was dies bedeutet. Ebenso, dass keine endliche Menge mit einer unendlichen gleichmächtig sein kann. Aber können wir auch unendliche Mengen finden, die nicht gleichmächtig sind? Untersuchen wir zuerst einige Mengen auf die „Art“ ihrer Unendlichkeit hin!

2.15 Definition. Eine Menge X heißt „abzählbar unendlich“, wenn es eine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow X$ von der Menge der natürlichen Zahlen nach X gibt.

Da $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ist, bedeutet dies, dass wir die Elemente von X abzählen können, $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Wir sagen auch, wir können die Elemente von X in eine Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ hinschreiben.

2.16 Beispiele: (1) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich, denn in Aufgabe 2.22 haben wir eine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ konstruiert.

(2) Die Menge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich, denn mit Hilfe des sogenannten ersten Cantor'schen Diagonalverfahrens können wir ihre Elemente wie folgt abzählen:



Indem wir in Pfeilrichtung gehen, schreiten wir – auf lange Sicht – alle Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ab. Es wäre nicht so schwer, eine Formel $f(i)$ zu basteln, welche das i-te Glied der Folge beschriebe; das ist uns jedoch im Moment nicht wichtig.

(3) Damit ist auch $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich, denn wir könnten in ähnlicher Weise auch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abschreiten. Oder wir argumentieren so: Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Bijektion, sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist $(f\times f) : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto (f(x), f(y))$ eine Bijektion (bitte beweisen!) und damit ist $(f \times f) \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Bijektion.

(4) Eine Teilmenge X einer abzählbar unendlichen Menge Y ist endlich oder selbst abzählbar unendlich. Denn entweder ist X endlich. Oder indem wir die Elemente von Y in eine Folge schreiben, machen wir dies automatisch auch für die Elemente von X:
Elemente von $Y: y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$.
Wir streichen alle weg, die zu $Y \setminus X$ gehören

$$\begin{array}{lllllll} & \cancel{y_0}, & y_1, & \cancel{y_2}, & y_3, & \ldots, & \\ \text{und übrig bleiben} & & x_0, & & x_1, & \ldots, & \text{die Elemente von } X. \end{array}$$

(5) Mit Hilfe von (4) können wir leicht einsehen, dass auch die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar unendlich ist. Sie ist unendlich, klar, also brauchen wir nur noch eine injektive Abbildung in eine abzählbar unendliche Menge zu finden. Wir definieren zu diesem Zweck:

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ p/q \mapsto \begin{cases} (0,0) & \text{falls } p/q = 0\,, \\ (p,q) & \text{falls } q \text{ positiv, } p \neq 0 \text{ und } p/q \text{ ausgekürzt ist.} \end{cases}$$

Aus den Eigenschaften der üblichen Darstellung der rationalen Zahlen als Bruch p/q ergibt sich die Injektivität der Abbildung.

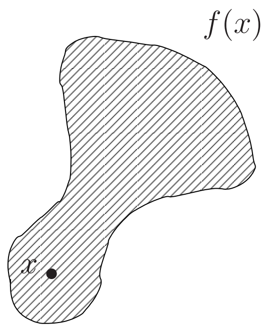
2.3 Satz. *Sei X eine Menge, dann gibt es keine surjektive Abbildung $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.*

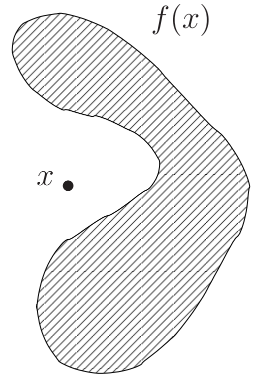
Beweis: Gegeben eine Abbildung $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, wir haben eine Teilmenge B von X zu finden, sodass gilt:

$$\bigwedge_{x \in X} f(x) \neq B\,.$$

Achtung: $f(x)$ ist eine Menge.

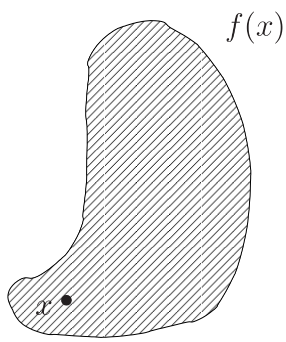
Für jedes $x \in X$ gibt es die beiden Möglichkeiten, $x \in f(x)$ oder $x \notin f(x)$.





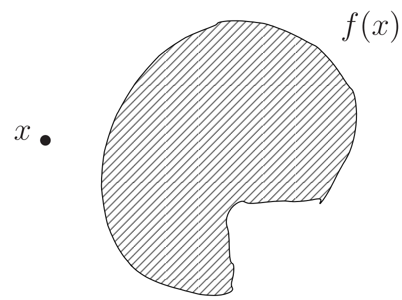
Wir setzen fest: $B := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$, und behaupten, B ist nicht im Wertebereich von f. Denn entweder ist $x \in f(x)$ und damit per Definition $x \notin B$, also $B \neq f(x)$, oder es ist $x \notin f(x)$, also $x \in B$ und damit $B \neq f(x)$.

Fall 1.



$x \notin B$, also $f(x) \neq B$

Fall 2.



$x \in B$, also $f(x) \neq B$

□

2.16 Definition. Die Menge Y heißt mächtiger als X (oder die Menge X schmächtiger als Y), wenn es eine injektive Abbildung $X \longrightarrow Y$ gibt und keine Abbildung $X \longrightarrow Y$ surjektiv ist.

2.17 Beispiel: Wegen des Satzes ist eine Menge X immer schmächtiger als ihre Potenzmenge.

Anmerkung: Hier liegt es nahe, folgende Frage zu stellen: Was ist, wenn es eine injektive Abbildung $\alpha : X \longrightarrow Y$ gibt und auch eine surjektive Abbildung $\beta : X \longrightarrow Y$ (ohne dass notwendigerweise $\alpha = \beta$ gilt)? Wir behaupten, dass dann X, Y gleichmächtig sind. Das ergibt sich aus dem folgenden zitierten Satz.

2.4 Satz. *Äquivalenzsatz von Bernstein.*
Die Mengen X und Y sind genau dann gleichmächtig, wenn es eine injektive Abbildung $X \longrightarrow Y$ und eine surjektive Abbildung $X \longrightarrow Y$ gibt.

Zum Beweis (der gar nicht so schwer ist) verweisen wir auf unsere Literaturliste.

Noch der Vergleich von $\mathbb{Q}$ mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen?

2.5 Satz. *Die Menge $\mathbb{Q}$ ist schmächtiger als die Menge $\mathbb{R}$.*

Beweis: Die Inklusionsabbildung $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv. Es bleibt uns also zu zeigen, dass keine Abbildung $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ surjektiv ist. Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, genügt es also zu zeigen, dass keine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ surjektiv ist. Weil es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{R}$ auf die Menge $\mathbb{R}_+$ der positiven reellen Zahlen gibt, genügt es also auch zu zeigen, dass jede Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ nicht surjektiv ist.
Wir werden die unendliche Dezimaldarstellung von Zahlen in $\mathbb{R}_+$ verwenden; ich gehe mal davon aus, dass Sie alle intuitiv wissen, was diese Darstellung besagt. Außerdem müssen wir kurz überlegen, in wie weit diese Darstellung eindeutig ist. Z.B. ist $1,00\ldots = 0,99\ldots$ und $0,0200\ldots = 0,0199\ldots$. Das ist dann auch der einzige auszuspielende Trick. Wenn wir also verlangen, dass unsere Dezimalentwicklungen niemals ab einer Stelle nur Nullen aufweisen, dann sind diese Darstellungen eindeutig!
Gegeben also eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, so möchten wir eine Zahl in $\mathbb{R}_+$ finden, die kein Wert von f ist. Das erledigen wir mit dem sogenannten „zweiten Cantor'schen Diagonalverfahren“. Wir wollen diese Zahl schreiben als $?,???\ldots$, indem wir die Ziffer an der Stelle vor dem Komma und die Ziffern an den Stellen hinter dem Komma angeben: An der i-ten Stelle (die 0-te Stelle sei die vor dem Komma) stehe eine 9, falls die Zahl $f(i)$ dort eine Ziffer k mit $0 \leq k < 9$ zu stehen hat, und es stehe dort eine 8, wenn $f(i)$ dort die Ziffer 9 hat. Die so definierte Zahl ist dann von allen $f(i)$, $i \in \mathbb{N}$, verschieden, denn sie unterscheidet sich von $f(i)$ gerade an der i-ten Stelle. $\square$

Noch Aufgaben zur Erholung?

2.23 Aufgabe. Welche der folgenden Mengen hat die meisten Elemente?

(1) $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$,

(2) $\mathrm{Abb}(\{1,2,3\},\{1,2,3\}) := \{f : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}\}$.

2.24 Aufgabe. Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen. Dann ist die Menge $\mathrm{Abb}(X,X)$ der Abbildungen von X nach X mächtiger als X. (Hinweis: Wenden Sie das zweite Cantor'sche Diagonalverfahren passend an!).

2.25 Aufgabe. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ und die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(X,\{0,1\})$ von X nach $\{0,1\}$ gleichmächtig sind.
(Hinweis: Wenn Sie einer Teilmenge A von X ihre sogenannte „charakteristische Funktion“

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin A\,, \\ 1 & \text{für } x \in A \end{cases}$$

zuordnen, haben Sie eine Bijektion $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathrm{Abb}(X,\{0,1\})$ mit Umkehrabbildung $f \mapsto \{x \mid f(x) = 1\}$ gefunden).

2.6 Literatur

Es sei wieder nur eine Mini-Auswahl gegeben:

1. H.-D. Ebbinghaus: Einführung in die Mengenlehre. 3. Auflage 1994. B.I. Wissenschaftsverlag.

2. P.R. Halmos: Naive Mengenlehre. 4. Auflage 1976. Vandenhoeck & Ruprecht.

3 Natürliche Zahlen, Beispiele für vollständige Induktion, rekursive Definition

Die natürlichen Zahlen sind uns im Grunde allen geläufig, wenn auch nicht notwendigerweise in allen Feinheiten. Im folgenden bleiben wir bei unserem intuitiven Begreifen und beschäftigen uns ein wenig näher mit dem Prinzip der vollständigen Induktion (anhand mehrerer typischer Beispiele) und mit rekursiver Definition.

3.1 Vollständige Induktion

Sei $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Achtung: Wir betrachten 0 als natürliche Zahl, das ist nicht in allen Texten so. Wir nehmen an, dass wir natürliche Zahlen addieren und multiplizieren können, dass wir wissen, was „kleiner gleich“ (in Zeichen: „$\leq$“) bzw. „kleiner“ (in Zeichen: „$<$“) als Beziehung zwischen zwei natürlichen Zahlen bedeutet. (Wir sagen auch „j größer gleich i“ , wenn „i kleiner gleich j“ gilt). Alle diese Rechenregeln lassen sich aus einfachen Grundannahmen (sogenannten „Axiomen“) ableiten, z.B. dem von G. Peano angegeben Axiomensystem. Das wollen wir hier nicht tun, weil es ziemlich lange dauert und uns an dieser Stelle auch nicht viel an Erkenntnis bringen würde. Einen Blick darauf zu werfen, kann jedoch vielleicht interessant sein.

Peano-Axiome. Sei P eine Menge, $e \in P$ ein fest gewähltes Element und $\nu : P \longrightarrow P$ eine Abbildung. Es gelte:

(1) Die Abbildung ν ist injektiv und $e \notin \nu(P)$.

(2) Für jede Teilmenge $M \subset P$ mit den Eigenschaften:

 (a) $e \in M$,

(b) $\bigwedge_{x \in P} x \in M \Longrightarrow \nu(x) \in M$,

gilt $M = P$.

Die Eigenschaft (1) impliziert, dass P jedenfalls unendlich ist. Die Eigenschaft (2) ist das „Prinzip der vollständigen Induktion“, welches wir gleich für $\mathbb{N}$ nochmals formulieren werden. Wir möchten jedoch eine Idee geben, wie wir aus den Peano-Axiomen die uns bekannten natürlichen Zahlen erhalten könnten. Zunächst wollen wir beweisen, dass erstens für jedes $x \in P$ immer $\nu(x) \neq x$ ist und dass zweitens $\nu(P) = P \setminus \{e\}$ ist. Das wird durch das Zusammenspiel von (1) und (2) impliziert. Denn:

3.1 Aufgabe. Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ an, die injektiv ist, sodass $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sodass ein $i \in \mathbb{N}$ existiert mit $f(i) = i$.

3.1 Satz. $\bigwedge_{x \in P} \nu(x) \neq x$.

Beweis: Sei $M := \{x \in P \mid \nu(x) \neq x\}$. Dann ist $e \in M$; wenn $x \in M$ ist, d.h. $\nu(x) \neq x$, dann ist $\nu(\nu(x)) \neq \nu(x)$, weil ν injektiv ist; d.h. es ist $\nu(x) \in M$. Nach (2) gilt somit $M = P$, d.h. $\nu(x) \neq x$ für alle $x \in P$. □

3.2 Satz. *Es ist* $\nu(P) = P \setminus \{e\}$.

Beweis: Sei $M := \{e\} \cup \nu(P)$, dann haben wir zu zeigen, dass $M = P$ gilt. Nun ist $e \in M$ und für jedes $x \in M$ ist $\nu(x) \in \nu(P) \subset M$. Nach (2) ist also $M = P$. □

Es liegt nun nahe, e als die Zahl 0 anzusehen, $\nu(0)$ als die Zahl 1, $\nu(\nu(0))$ als die Zahl 2, $\nu(2)$ als 3 usw. Ferner wird man $n+0 := n$ und $n+1 := \nu(n)$ setzen; die Abbildung ν wird dann durch $n \mapsto n + 1$ gegeben.. Alle Eigenschaften der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ lassen sich so aus den Axiomen (1) und (2) herleiten.

Dies wird z.B. in dem berühmten Buch von E. Landau gemacht: Grundlagen der Analysis, 3. Auflage New York 1960. Die Darstellung ist konsequent in dem mathematischen Telegrammstil „Definition, Satz, Beweis“ gehalten. Die

Herleitung aller üblichen Eigenschaften der natürlichen Zahlen ist auf Seite 42 beendet; dann folgen noch die Konstruktion der rationalen Zahlen, der reellen Zahlen und der komplexen Zahlen. Die obigen Sätze sind dort der Satz 2 und der Satz 3.

Das Prinzip der vollständigen Induktion formulieren wir nochmal für $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (wobei aus ν die Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$, geworden ist).

Prinzip der vollständigen Induktion: Sei $M \subset \mathbb{N}$, sodass gilt:

(a) $0 \in M$,

(b) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{N}} (x \in M \Longrightarrow x + 1 \in M)$,

dann ist $M = \mathbb{N}$.

3.3 Satz. *Folgende Formulierung ist äquivalent zum Prinzip der vollständigen Induktion:*
Für jede natürliche Zahl n sei $A(n)$ eine Aussage (die von n abhängt). Es gelte:

(a) $A(0)$ ist richtig,

(b) für jedes $n \in \mathbb{N}$ impliziert $A(n)$ die Aussage $A(n + 1)$,

dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Beweis: Legen wir zunächst die erste Formulierung zugrunde. Wir bilden dann $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist richtig}\}$ und konstatieren: Es ist $0 \in M$ und für alle $x \in M$ ist $(x + 1) \in M$; also ist $M = \mathbb{N}$, d.h. die Aussage $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Gehen wir umgekehrt nun von der zweiten Formulierung aus und folgern die erste. Sei dazu $M \subset \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

(a) $\qquad 0 \in M,$

und der Eigenschaft

(b) $\qquad \bigwedge\limits_{x\in\mathbb{N}} x \in M \Longrightarrow x + 1 \in M\,.$

Als Aussage $A(n)$ nehmen wir die Aussage „$n \in M$". Dann ist also $A(0)$ richtig und $A(n)$ impliziert $A(n+1)$ für alle n, also ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig, d.i. $M = \mathbb{N}$. $\square$

Wir brauchen noch eine weitere Version des Prinzips, weil manchmal nämlich die Aussage $A(n)$ nur für $n \geq n_0$, n_0 eine feste natürliche Zahl, definiert ist.

3.4 Satz. *Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ definiert ist und sodass gilt:*

(a) $A(n_0)$ *ist richtig,*

(b) $\bigwedge\limits_{n \geq n_0} A(n) \Longrightarrow A(n+1)$,

dann ist $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ richtig.

Beweis: Wir definieren $M \subset \mathbb{N}$ als $\{0, 1, \ldots, n_0 - 1\} \cup \{n \mid A(n) \text{ ist richtig}\}$. Dann ist $0 \in M$ und – genau hingeschaut – gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass „$n \in M$" die Aussage „$n + 1 \in M$" impliziert. D.h. $M = \mathbb{N}$ und somit $\{n \mid A(n) \text{ ist richtig}\} \supset \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$. $\square$

3.1 Definition. Wir nennen (a) den „Induktionsanfang" und (b) den „Induktionsschritt". Im Induktionsschritt nennen wir $A(n)$ die „Induktionsvoraussetzung".

Wir können an dieser Stelle schon ahnen, dass „vollständige Induktion" ein wunderbares Beweisprinzip ist. Dazu geben wir jetzt ein Beispiel, bevor im nächsten Abschnitt viele Beispiele folgen werden.

3.1 Beispiel: Für $n \geq 1$ sei $A(n)$ die Behauptung:

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2 \,.$$

Wir möchten durch vollständige Induktion beweisen, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ richtig ist.

Induktionsanfang: Sei $n_0 := 1$. Dann ist $A(n_0)$ richtig, denn auf jeder Seite der Gleichung steht dann 1 für $n = 1$.

Induktionsschritt: Wir haben $A(n+1)$ aus $A(n)$ herzuleiten für $n \geq 1$.

Wir rechnen:

$$1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1)$$

(nach Induktionsvoraussetzung) und

$$n(n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1)(n/2 + 1) = (n + 1)(n + 2)/2 \,.$$

D.h. $1 + 2 + \ldots + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$, das ist $A(n + 1)$.

$\square$

NB. Diese Formel läßt sich auch leicht ohne Induktion beweisen wie folgendes Bild suggerieren soll:

			1
		2	4
	3	3	
4	2		
1			

$$1 + 2 + 3 + 4 = 4 \cdot 5/2$$

3.2 Weitere Beispiele für vollständige Induktion

Da wir im folgenden öfters mehrere Zahlen aufzusummieren haben, wollen wir das der Abkürzung der Notation dienende Summenzeichen diskutieren (auch wenn dies direkt nichts mit dem Thema zu tun hat).

3.2 Definition. *Das Summenzeichen.*
Angenommen, es sind n (reelle) Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

eine Abkürzung für $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

3.2 Beispiele:

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \ = 1 + 2 + \ldots + n,$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=3}^{7} j \ = 3 + 4 + \ldots + 7,$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} (2k-1) \ = 1 + 3 + \ldots + 2m - 1,$

(iv) $\displaystyle\sum_{1}^{w} 1 \ = 1 + 1 + \ldots + 1 \ (w-\text{mal}),$

usw.

3.3 Definition. *Potenzen mit natürlichen Zahlen im Exponenten.*
Sei q reell, n natürlich, dann ist

$$q^n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \text{ (auch für } q = 0\text{)}\,, \\ \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{n \text{ Faktoren}} & \text{falls } n \geq 1\,. \end{cases}$$

D.h. $q^0 = 1$, $q^1 = q$, $q^2 = q \cdot q$ usw.

3.3 Beispiel: Für jede natürliche Zahl n gilt die Aussage $A(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\,.$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$: Dann besteht die Summe auf der linken Seite aus dem einen Summanden $2 \cdot 1 - 1 = 1$, und die rechte Seite ist ebenfalls 1.

Induktionsschritt: Sei $n \geq 1$. Wir haben zu zeigen, dass $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ impliziert. Wir rechnen

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2(n+1) - 1$$

(nach Induktionsvoraussetzung) und

$$n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

(wegen der berühmten Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$). $\square$

Bemerkung: Die obige Formel können wir ohne Induktion mittels eines Tricks beweisen, der, wie wir gleich sehen werden, in vielen Fällen sehr nützlich ist:

$$\sum_{i=0}^{n-1}((i+1)^2 - i^2) = 1^2 - 0 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + \ldots + n^2 - (n-1)^2 = n^2\,.$$

Und es ist $(i+1)^2 - i^2 = i^2 + 2i + 1 - i^2 = 2i + 1$, also $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

3.2 Aufgabe. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (1/6)n(n+1)(2n+1)\,.$$

Wir müssen natürlich eine Formel haben, wenn wir vollständige Induktion anwenden wollen. Deshalb stellt sich die Frage, wie können wir für vorgegebenen Exponenten r eine „gute“ Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} k^r$$

finden?

Mit einer Variante von obigem Trick wollen wir das für $r = 2$, also die Summe der ersten n Quadratzahlen (wie in der Aufgabe), demonstrieren:
Es gilt: $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ (Binomiallehrsatz im nächsten Kapitel).

Also bilden wir

$$(n+1)^3 = \sum_{i=0}^{n}((i+1)^3 - i^3) = 3(\sum_{i=0}^{n} i^2) + 3(\sum_{i=0}^{n} i) + n + 1\,.$$

Es folgt: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = (1/3)((n+1)^3 - 3n(n+1)/2 - (n+1)) =$
$= (1/6)(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2) = (1/6)(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2) =$
$= (1/6)n(n+1)(2n^2 + n) = (1/6)n(n+1)(2n+1)$.

D.h. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = (1/6)n(n+1)(2n+1)$. (N.B. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$). □

Auf ähnliche Weise könnten wir jetzt eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

finden. Wir müssen nur in der Lage sein $(i+1)^4 - i^4$ auszurechnen, dann schaffen wir es. Probieren Sie doch einfach mal?

3.3 Aufgabe. Die geometrische Summe.
Sei q eine reelle (oder komplexe) Zahl, sei $q \neq 1$; dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)\,.$$

3.4 Aufgabe. Sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} x/2 & \text{falls } x \text{ gerade,} \\ x+1 & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eine natürliche Zahl k gibt mit $g^k(n) = 1$ (das ist das Beispiel 2.14). Hinweis: Formulieren Sie die Behauptung, die Sie durch Induktion beweisen wollen, passend!

Hier folgen endlich noch „etwas andere“ Induktionsbeweise:

3.5 Satz. *Eine Menge M mit n Elementen hat genau 2^n verschiedene Teilmengen. (Also $\mathcal{P}(M)$ hat 2^n Elemente).*

Beweis: Wir versuchen eine Induktion nach der Anzahl n der Elemente von M.

Induktionsanfang: $n = 0$, d.h. $M = \varnothing$; dann hat $\mathcal{P}(M)$ genau $2^0 = 1$ Elemente, das einzige Element ist nämlich $\varnothing$.

Induktionsschritt: Sei $n \geq 0$, die Aussage bedeutet für n, dass eine Menge mit n Elementen genau 2^n verschiedene Teilmengen hat. Sei nun M eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Der Einfachheit halber nehmen wir $M = \{1, 2, \ldots, n, n + 1\}$ an. Die Teilmengen $A \subset M$ teilen wir in zwei Sorten ein:

1. Sorte: $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$,

2. Sorte: $A \not\subset \{1, 2, \ldots, n\}$, d.h. $n+1 \in A$ und $A = (A \cap \{1, 2, \ldots, n\}) \cup \{n+1\}$.

Von der ersten Sorte gibt es nach Induktionsvoraussetzung 2^n; aber auch von der zweiten Sorte gibt es 2^n, weil $A \cap \{1, 2, \ldots, n\}$ eine beliebige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, n\}$ sein kann. Also gibt es

$$2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

verschiedene Teilmengen von M (da keine Menge der ersten Sorte von der zweiten Sorte ist und umgekehrt). $\square$

3.6 Satz. *Sei M eine Menge mit k Elementen und N eine Menge mit n Elementen. Dann gibt es n^k verschiedene Abbildungen von M nach N, d.h.* $\mathrm{Abb}(M, N)$ *hat n^k Elemente.*

Bevor wir den Beweis dieses Satzes führen sei angemerkt:
Die Menge $\mathrm{Abb}(\{1, 2, \dots, k\}, \{0, 1\})$ ist nach Aufgabe 2.25 gleichmächtig mit $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})$, hat also 2^k Elemente nach jedem der beiden Sätze!

Die Aussage des Satzes kann in suggestiverer Weise umformuliert werden: Wir betrachten $N = \{1, 2, \dots, n\}$ als Alphabet mit n Buchstaben. Eine Abbildung von $\{1, \dots, k\}$ nach N zu definieren, bedeutet, ein erstes Element von N als Wert der Abbildung in 1 zu wählen, dann ein weiteres Element von N als Wert der Abbildung in 2, usw. D.h. wir bilden ein Wort mit k Buchstaben aus dem Alphabet N. Wir können also den Satz so umformulieren:

Über einem Alphabet mit n Buchstaben gibt es n^k Wörter der Länge k.

3.4 Beispiel: Sei $N = \{a, b, c\}$, also $n = 3$. Die Wörter der Länge 1 über diesem Alphabet sind a, b, c; das sind 3. Wenn man an jedes Wort der Länge 1 einen Buchstaben anhängt, bekommt man alle Wörter der Länge 2:

$$\begin{array}{c|ccc} a & aa & ab & ac \\ b & ba & bb & bc \\ c & ca & cb & cc \end{array}$$

Das sind 3^2.

Beweis des Satzes: Wir folgen der Beweisidee des Beispiels. Sei n fest, dann beweisen wir durch Induktion: Für $k \geq 0$ gibt es n^k Wörter der Länge k.

Induktionsanfang: Für $k = 0$ gibt es nur das leere Wort ( ), also $n^0 = 1$ Wörter.

Induktionsschritt: Für $k \geq 0$ gibt es n^k Wörter der Länge k; wenn wir an jedes dieser Wörter einen der n Buchstaben anhängen, bekommen wir alle Wörter der Länge $(k + 1)$.

$$a_1 a_2 \dots a_k \boxed{?}^{\;n \text{ Wahlen für } a_{k+1}}$$

Also bekommen wir $n^k \cdot n = n^{k+1}$ Wörter der Länge $(k + 1)$.

3.5 Aufgabe. Variieren wir doch den Sachverhalt ein wenig:
(i) Angenommen wir haben k Alphabete M_i mit jeweils n_i Buchstaben, $i = 1, \dots, k$. Jetzt sollen wir alle Wörter der Länge k bilden, wobei wir den i-ten

Buchstaben aus M_i wählen müssen. Wieviele solche Wörter gibt es?
(ii) Wieviele Elemente hat das cartesische Produkt $M_1 \times \ldots \times M_k$, wenn es denn (wie 2.2 vorschlägt) „ordentlich“ definiert ist?

3.6 Aufgabe. Wieviele nichtleere Wörter der Länge ≤ 5 über dem Morsealphabet $\{-, \cdot\}$ gibt es?

3.3 Rekursive Definition

Wir werden uns darauf beschränken, einige – mehr oder weniger einfache – Beispiele zu betrachten. Doch auch diese können es schon in sich haben.

Sei P eine Menge (sei z.B. konkret P gleich der Menge der rationalen Zahlen). Sei nun $a_0 \in P$ fest gewählt, sei $\varphi : P \longrightarrow P$ eine Abbildung. Dann können wir eine Folge von Elementen

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$$

bilden mit $a_{i+1} := \varphi(a_i)$ für $i \geq 0$. Das heißt, wir geben a_0 vor und rechnen a_{i+1} aus a_i durch Einsetzen von a_i in φ aus (für $i \geq 0$). Das ist eine besonders einfache Methode, denn offensichtlich ist $a_1 = \varphi(a_0)$, $a_2 = \varphi(a_1) = \varphi(\varphi(a_0))$ und allgemein $a_{i+1} = \varphi^{i+1}(a_0)$ (wie man sich formal durch vollständige Induktion klarmachen kann). Außerdem kennen wir diesen Vorgang schon vom Iterieren einer Abbildung (vergl. Definition 2.12).

3.5 Beispiel: Sei $a_0 := 1$ und $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto (1/2)x + 2$, dann ist der Beginn der Folge $(1, 5/2, 13/4, \ldots)$.

3.7 Aufgabe. Geben Sie eine explizite Formel für das i-te Glied a_i der Folge an, $i \geq 1$. Gilt $a_{100} \geq 4$?

3.6 Beispiel: Ein noch einfacheres Beispiel ist im Beweis von Satz 3.5 versteckt. Sei a_n die Anzahl der Teilmengen einer Menge mit n Elementen. Dann haben wir dort insbesondere die Formel $a_{n+1} = 2a_n$ gezeigt. Mit $a_0 = 1$ ist damit die Folge $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ definiert.

Jetzt wollen wir diese Art von Konstruktion einer Folge etwas komplizierter gestalten. Wir könnten für jedes i eine andere Funktion φ_i wählen, um a_{i+1} durch $a_{i+1} = \varphi_i(a_i)$ auszurechnen:

3.7 Beispiel: Sei $\varphi_j(x) = (1/(j+1))x + 1$. Dann erhalten wir mit $a_0 = 1$ die weiteren Folgenglieder $a_1 = \varphi_0(a_0) = 2$, $a_2 = \varphi_1(2) = (1/2)2 + 1$, $a_3 = (1/3)2 + 1$, usw.

3.4 Definition. Diese Art der Definition nennen wir „rekursive Definition“. Die Vorgabe von a_0 ist der „Rekursionsanfang“ und die Bedingung $a_{i+1} = \varphi(a_i)$ (oder $\varphi_i(a_i)$) die „Rekursionsformel“.

Der Phantasie nach mehr sind keine Grenzen gesetzt:

3.5 Definition. *Folge der Fibonacci-Zahlen.*
Sei $f_0 := 1$ und $f_1 := 1$; für $i \geq 0$ sei $f_{i+2} = f_i + f_{i+1}$. Die Zahl f_i nennt man i-te Fibonacci-Zahl. Die Folge beginnt also so: $(1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$.
(Die Vorgabe von f_0 und f_1 ist der Rekursionsanfang und $f_{i+2} = f_i + f_{i+1}$ die Rekursionsformel.)

3.8 Aufgabe. Geben Sie die Fibonacci-Zahl f_{12} an!

In Kapitel 6 werden wir uns ausgiebiger mit den Fibonacci-Zahlen beschäftigen und insbesondere eine explizite Formel herleiten.

Es war Leonardo Pisano „Fibonacci“, der die Folge dieser Zahlen im Jahre 1202 in einem Buch aufgestellt hat und zwar als Kaninchenaufgabe:

Jemand gibt mir ein neugeborenes Kaninchenpaar. Dieses bekommt nach zwei Monaten ein weiteres Paar als Nachwuchs und danach in jedem folgenden Monat ein Paar. Jedes neue Paar verhält sich ebenso. Wieviele Paare habe ich (jetzt beginne ich doch tatsächlich bei 1 zu zählen) nach 12 Monaten?

Monat	1	2	3	4	5
Paar	1	1	2	3	...

Wir können also f_n nur berechnen, indem wir zurücklaufen und erst alles „vor“ f_n berechnen. Dass wir wirklich für jede natürliche Zahl n eine Zahl f_n definiert haben, können wir mit vollständiger Induktion einsehen (Das gilt entsprechend für all unsere Definitionen durch Rekursion):

Sei $A(n)$ die Aussage: Für $0 \leq i \leq n$ kennen wir f_i. Dann sind $A(0)$ und $A(1)$ richtig. Ist $A(n)$ richtig ($n \geq 1$), dann ist $A(n+1)$ richtig, denn $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ kennen wir dann. Also kennen wir alle f_n.

Die Fibonacci-Zahlen sind ubiquitär; zwei Aufgaben dazu?

3.9 Aufgabe. Sei g_n die Anzahl der Wörter in den Buchstaben 0, 1 der Länge n ($n \geq 1$), die folgende Bedingung erfüllen: Nach einer 1 folgt immer eine 0, nach einer 0 folgt eine 1 oder eine 0. Beispiel: Die Wörter der Länge 1 sind 0 und 1; die Wörter der Länge 2 sind $01, 00, 10$.

Zeigen Sie, dass $g_{n+2} = g_n + g_{n+1}$ gilt für $n \geq 1$.

3.10 Aufgabe. Betrachten wir nochmal die Abbildung $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ von Beispiel 2.14. Also

$$g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{für } x \text{ gerade,} \\ x+1 & \text{für } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei a_n die Anzahl der $x \in \mathbb{N}$ mit $g^{n+1}(x) = 1$, aber $g^k(x) \neq 1$ für $0 \leq k < n+1$.

Dann ist $a_n = f_n$, der n-ten Fibonacci-Zahl.

(Anmerkung: Diese Aufgabe habe ich aus einem Artikel, den ich leider nicht wiederfinden kann. Der Autor dieses Artikels möge entschuldigen, dass ich keine Referenz geben kann. Sollte er (oder ein anderer) mir die Referenz geben, dann wird sie hier eingefügt!)

Die Phantasie will noch „Meer“:

Eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ von Elementen von P ist ja nichts anderes als eine Funktion $a : \mathbb{N} \longrightarrow P$ mit $a(i) = a_i$. Wir könnten also auf die Idee kommen, auch Funktionen $b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow P$ rekursiv zu definieren.

Das versuchen wir auch (für $P = \mathbb{N}$):

3.6 Definition. Seien (l, m) und (k, n) Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Dann setzen wir

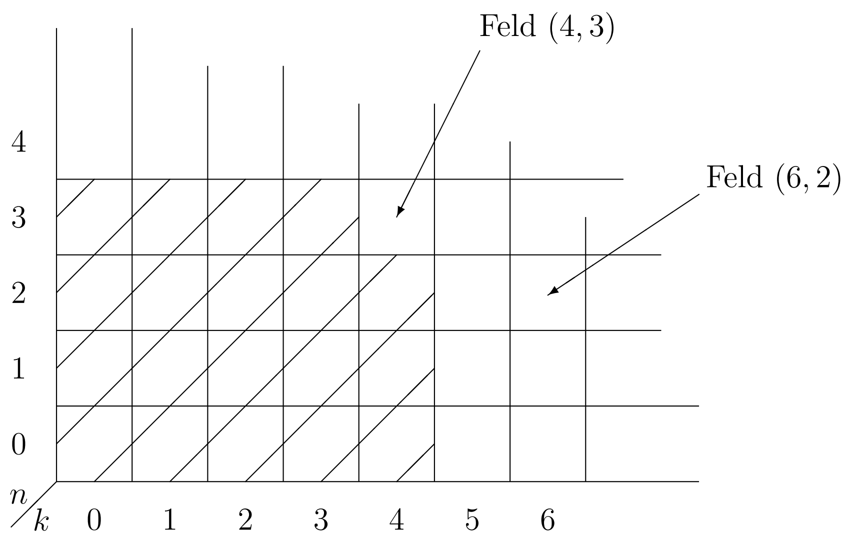
$$(l, m) \leq (k, n) :\Longleftrightarrow l \leq k \text{ und } m \leq n$$

und

$$(l, m) < (k, n) :\Longleftrightarrow l < k \text{ und } m \leq n\,, \text{ oder } l \leq k \text{ und } m < n\,.$$

Die erste Beziehung lesen wir als „(l, m) kommt vor (k, n)“, die zweite als „(l, m) kommt echt vor (k, n)“.

Wir wollen uns dies mit einem unendlichen Spielbrett veranschaulichen, wo wir die Felder mit $(0, 0), (1, 0), (0, 1), \ldots$ bezeichnen:



Die schraffierten Felder sind genau die echten Vorgänger von Feld $(4, 3)$.

Stellen wir uns nun vor, wir haben schon für alle echten Vorgänger (ℓ, m) von $(4, 3)$ eine Zahl $\beta(\ell, m)$ erklärt. Dann könnten wir z.B. $\beta(4, 3) := \beta(4, 2) + \beta(3, 3)$ setzen; allgemeiner könnten wir den Wert $\beta(k+1, n+1)$ durch einen Ausdruck in den Werten $\beta(\ell, m)$ für alle echten Vorgänger $(\ell, m) < (k+1, n+1)$ von $(k+1, n+1)$ definieren. Es folgen zwei Beispiele zu diesem Verfahren:

3.8 Beispiel: Es gibt genau eine Funktion $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit folgenden

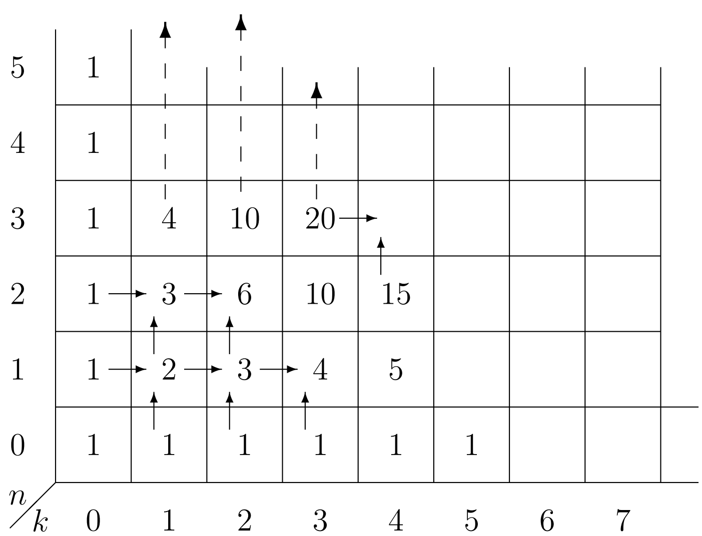
Eigenschaften:

(i) $\beta(0,n) = \beta(k,0) = 1$ für alle k, $n \in \mathbb{N}$,

(ii) für alle (k,n) mit $k \geq 0$ und $n \geq 0$ gilt

$$\beta(k+1, n+1) = \beta(k+1, n) + \beta(k, n+1)\,.$$

Beweis: Wir schauen auf unser Spielbrett: Auf die Felder $(0,n)$ und $(k,0)$ schreiben wir eine $1 = \beta(0,n) = \beta(k,0)$. Die Formel in (ii) erzwingt dann nacheinander, was wir auf die Felder $(1,n)$ als $\beta(1,n)$ zu schreiben haben; danach wenden wir uns den Feldern $(2,n)$ zu usw. Das Vorgehen wollen wir nicht ganz formal beschreiben, sondern wir appellieren an unsere Intuition. Hier ist das Bild (zu ergänzen zu einem „Meer" von Zahlen):

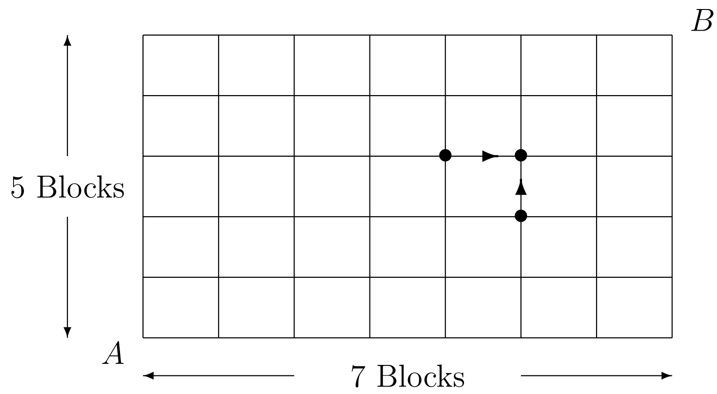


Auch dieses Verfahren ist eine Definition durch Rekursion. In dem konkreten Falle ist die Vorgabe der Zahlen $\beta(0,n) = \beta(k,0) = 1$ der Rekursionsanfang und $\beta(k+1,n+1) = \beta(k+1,n)+\beta(k,n+1)$ die Rekursionsformel. Es ist an dieser Stelle nicht so einfach, eine explizite Formel für die $\beta(k,n)$ zu finden, im nächsten Kapitel schon. $\square$

3.11 Aufgabe. (Die Stadtteilaufgabe ist ein Steckenpferd von mir, sie wird nochmals auftauchen).

Man stelle sich einen regelmäßigen Stadtteil vor wie folgt:

Wieviele Möglichkeiten gibt es dann, ohne Umwege von der Ecke A zur Ecke B zu gelangen?

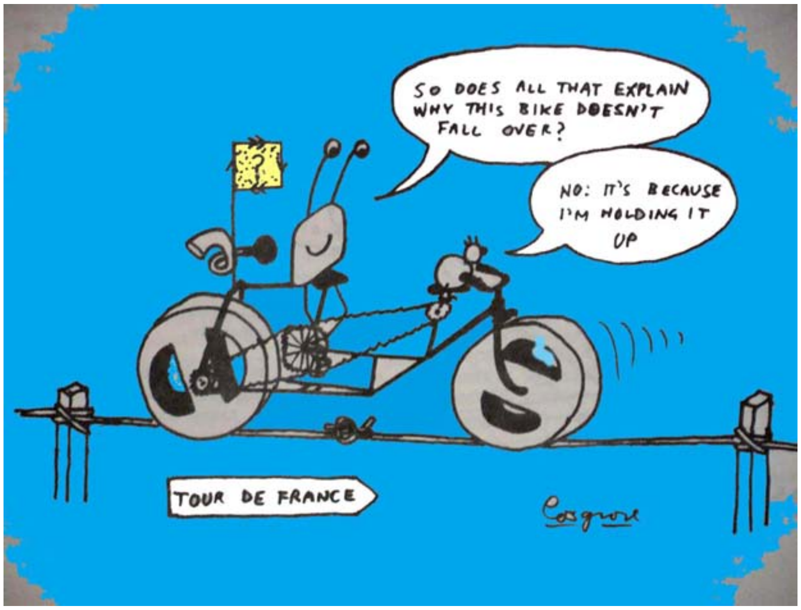


Hinweis: Man überlegt sich, dass man die Ecke $(k+1, n+1)$ nur über die Ecke $(k+1, n)$ oder über die Ecke $(k, n+1)$ erreichen kann. Daraus ergibt sich eine Rekursion. (Für k Blocks in der einen und n Blocks in der anderen Richtung bekommen wir wohl $\beta(k, n)$ als Antwort).

3.9 Beispiel: Es gibt genau eine Funktion $b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $b(0, n) = 1$ für alle $n \geq 0$ und $b(k, 0) = 0$ für $k > 0$ (Rekursionsanfang),

(ii) $b(k+1, n+1) = b(k+1, n) + b(k, n)$ für $k,\ n \geq 0$ (Rekursionsformel).



Beweis: Wir schauen auf das Spielbrett:

	1	5	10	10	5	1	
4	1	4	6	4	1	0	
3	1	3	3	1	0	0	
2	1	2	1	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
n / k	0	1	2	3	4	5	

□

Bemerkung. Die Zahlen $b(k,n)$ sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (gelesen: „n über k“), die wir im nächsten Kapitel ausgiebig studieren werden. Außerdem ist doch eine Verwandtschaft zwischen dem Zahlenschema der $\beta(k,n)$

und der $b(k, n)$ zu sehen?

3.4 Literatur

Zusätzlich zu dem Klassiker von E. Landau, auf den schon im Text hingewiesen wird, kann empfohlen werden:

2. H.D. Ebbinghaus u.a.: Zahlen. Grundwissen Mathematik 1. Zweite Auflage, Springer-Verlag 1988.
   Dieses Buch enthält einige für den Anfänger noch nicht geeignete Passagen. Doch es erzählt über Zahlen von der Antike bis heute und beschreibt auch die Herleitung der Eigenschaften der natürlichen Zahlen aus den Peano-Axiomen.

   Für später empfohlen – nicht für jetzt:

3. J.H. Conway: On Numbers and Games, Academic Press 1976.

4 Binomialkoeffizienten

Zuallererst treffen wir eine implizite Festlegung der im Titel genannten Zahlen.

4.1 Definition. Für die natürlichen Zahlen k, n sei $\binom{n}{k}$ (gelesen „n über k“) die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen. Diese Zahlen werden aus Gründen, die noch zur Genüge sichtbar werden, „Binomialkoeffizienten“ genannt.

4.1 Beispiel: (i) Es ist $\binom{n}{0} = 1$, denn jede Menge hat genau eine Teilmenge mit 0 Elementen, nämlich die leere Menge.

(ii) Ganz klar ist $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$; ferner ist $\binom{n}{n} = 1$.

(iii) Die Anzahl der 1-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist $\binom{n}{1} = n$.

4.1 Aufgabe. Berechnen Sie $\binom{3}{2}$ und $\binom{4}{2}$.

Wir werden gleich sehen, dass die so definierten Zahlen mit den Zahlen $b(k, n)$ von Beispiel 3.9 übereinstimmen. (Damit ist alles wieder im Lot, denn diese $b(k, n)$ hatten wir auch schon als Binomialkoeffizienten bezeichnet).

In diesem Kapitel werden wir das Steckenpferd reiten, eine Reihe von Eigenschaften der $\binom{n}{k}$ zu entwickeln – ohne zunächst eine explizite Formel für $\binom{n}{k}$ zu suchen. Insbesondere werden wir so auch den Binomiallehrsatz beweisen (d.h. wie man $(a + b)^n = a^n+?$ ausrechnet). Zum Schluss erst werden wir die übliche explizite Formel für die $\binom{n}{k}$ aus den entwickelten Eigenschaften ableiten.

Das Kapitel unterteilt sich wie folgt:

4.1 Symmetrie der Binomialkoeffizienten.

4.2 Die Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten.

4.3 Das Pascal’sche Dreieck.

4.4 Das Galton-Brett.

4.1 Symmetrie der Binomialkoeffizienten

4.1 Satz. *Für* $0 \leq k \leq n$ *gilt* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Beweis: Die Zahl $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der $k-$elementigen Teilmengen einer $n-$elementigen Menge M, z.B. $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sei $A \subset \{1, \ldots, n\}$ und A habe k Elemente. Dann können wir die Teilmenge A von M auf zwei Weisen beschreiben:

(i) Wir geben die Elemente von A direkt an (z. B. durch Ankreuzen).

(ii) Wir geben alle Elemente von M an, die nicht Elemente von A sind (z. B. durch Einkreisen).

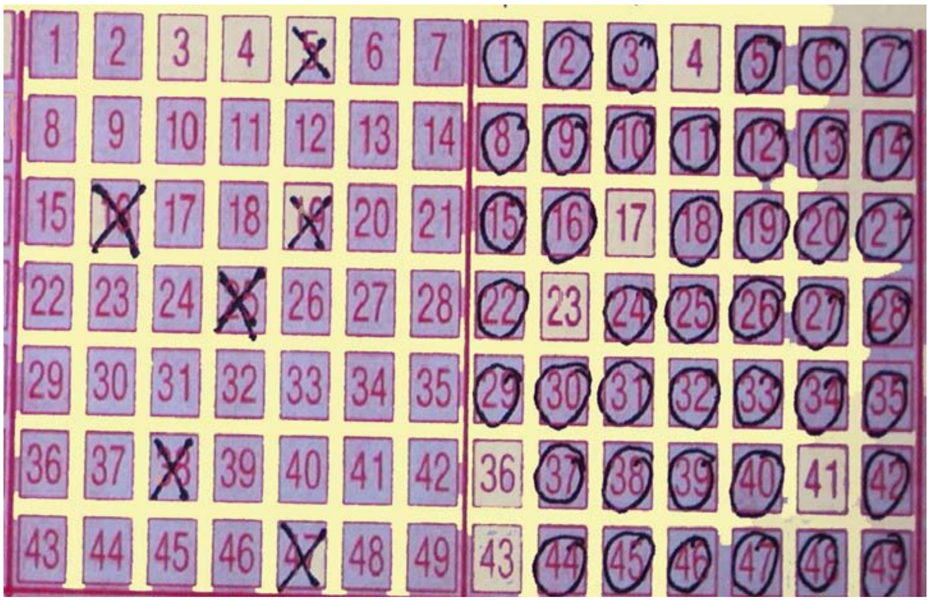
4.2 Beispiel: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$,

$$\text{entweder } \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, 5\} \quad \text{oder} \quad \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Ob wir A beschreiben oder das Komplement von A in M (d.h. die Menge der Elemente von M, die nicht zu A gehören), hat also den gleichen Informationsgehalt. Deswegen gibt es genau so viele $k-$elementige wie $(n-k)-$elementige Teilmengen von M, d.h. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

$\square$

4.3 Beispiel: Ob wir beim Lottospiel 6 aus 49 ankreuzen oder 43 aus 49 einkreisen ist egal.



Anmerkung: Mithilfe von Abbildungen können wir den Sachverhalt auch so darstellen: Mit E_k, k eine natürliche Zahl mit $k \leq n$, sei die Menge der $k-$elementigen Teilmengen von M bezeichnet. Dann ist $E_k \longrightarrow E_{n-k}$, $A \longmapsto M \setminus A$, ($M \setminus A$ das Komplement von A in M) eine bijektive Abbildung (mit Umkehrabbildung $E_{n-k} \longrightarrow E_k$, $B \longmapsto M \setminus B$), also haben E_k und E_{n-k} gleich viele Elemente.

4.2 Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten

4.2 Satz. *Die Zahlen $\binom{n}{k}$ genügen der Rekursion mit dem Rekursionsanfang*

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \binom{0}{k} = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k > 0\,.$$

und der Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \text{ für alle } k, n \geq 0\,.$$

Beweis: Mit den Beispielen haben wir den Rekursionsanfang schon nachgewiesen. Die Rekursionsformel sehen wir wie folgt ein (gleiche Beweisidee wie bei Satz 3.5):

Sei $M = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Dann teilen wir die $(k+1)-$elementigen Teilmengen A von M in zwei Sorten ein:

Sorte (i): $n + 1 \notin A$, d.h. $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$,

Sorte (ii): $n + 1 \in A$, d.h. $A = (A \cap \{1, 2, \ldots, n\}) \cup \{n + 1\}$.

Es gibt also $\binom{n}{k+1}$ Mengen der Sorte (i) und $\binom{n}{k}$ Mengen der Sorte (ii), weil in Sorte (ii) $A \cap \{1, 2, \ldots, n\}$ genau k Elemente hat. Also gilt:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$\square$

Somit wissen wir insbesondere, dass die $\binom{n}{k}$ gleich den Zahlen $b(k, n)$ von Beispiel 3.9 sind.

Wir zeigen nochmal das Zahlenschema auf dem unendlichen Brett:

5	1	5	10	10	5	1	
4	1	4	6	4	1	0	
3	1	3	3	1	0	0	
2	1	2	1	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6

4.2 Aufgabe. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

gilt. (Hinweis: Satz 3.5).

4.3 Das Pascal'sche Dreieck

Statt in dem Zahlenschema von eben mit n nach oben zu gehen, können wir mit n auch nach unten gehen und bekommen das Zahlenschema der $\binom{n}{k}$ in folgender Form:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4		
0	1	0	0	0	0		
1	1	1	0	0	0		
2	1	2	1	0	0		
3	1	3	3	1	0		
4	1	4	6	4	1	0	
5	1	5	10	10	5	1	0

Die Koeffizienten $\binom{n}{k} \neq 0$ können wir dann in Dreiecksgestalt ordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

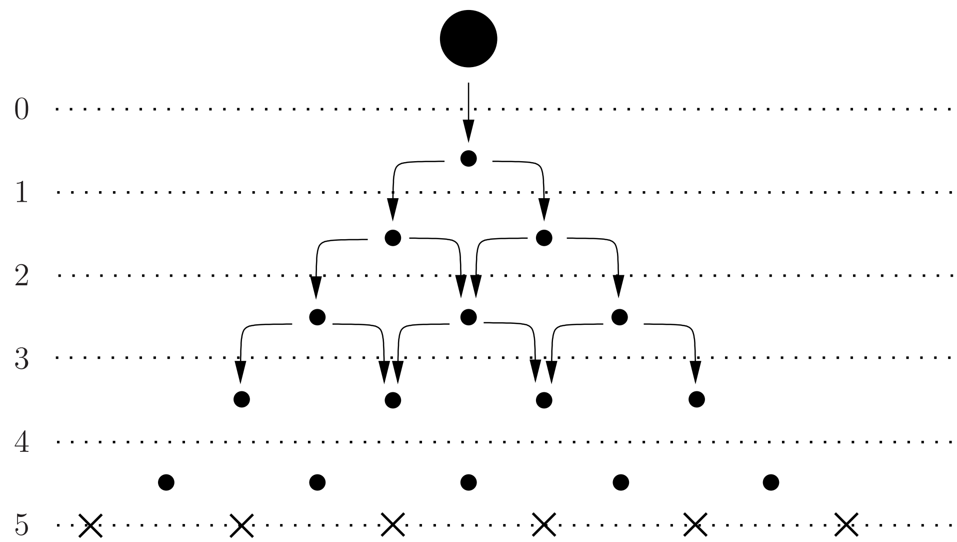
– –

– –

Das ist das nach B. Pascal benannte Pascal'sche Dreieck. (Es war nur meine Rekursionsystematik, die uns das berühmte Dreieck etwas umständlich erreichen ließ).

4.4 Das Galton-Brett

Man stelle sich folgende Situation vor: An einem senkrechten Brett befinden sich Stifte wie folgt in Dreiecksform angeordnet:



Plätze $i = 0, \ldots, 5$

Auf den obersten Stift fällt eine Kugel, die mit Wahrscheinlichkeit 1/2 jeweils nach links oder rechts fällt; sie trifft dann auf den nächsten Stift, wo die Ablenkung nach links oder rechts in gleicher Weise stattfindet, usw.

Wir fragen: mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich die Kugel nach Durchlaufen unseres Brettes auf Platz i, $i = 0, \ldots, 5$?

Antwort: $\binom{5}{i}/2^5$.

Denn: Wenn wir ganz viele Kugeln (sagen wir N) durchlaufen lassen, können wir uns vorstellen, dass an jedem Stift gleich viele nach links und nach rechts laufen. Damit haben wir das Bildungsgesetz des Pascal'schen Dreiecks, nur dass wir die Kugeln entsprechend aufteilen müssen.

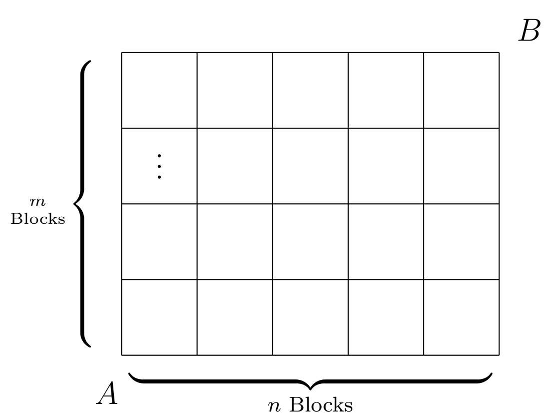
$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & N & & & \\
 & & N/2 & & N/2 & & \\
 & N/4 & & 2N/4 & & N/4 & \\
N/8 & & 3N/8 & & 3N/8 & & N/8 \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
 & & & \text{usw.} & & &
\end{array}
$$

Für $N = 1$ erhalten wir in unserem Beispiel-Brett $\binom{5}{i}/2^5$ Kugeln auf Platz i – jetzt als Wahrscheinlichkeit zu interpretieren.

Erinnerung: In Aufgabe 4.2 haben wir gezeigt, dass für jedes natürliche $n \geq 0$ die Summe $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ ist. Deswegen ist also $1/2^5\left(\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \cdots + \binom{5}{5}\right) = 1$ – wie es sich für die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\binom{5}{i}/2^5,\ i = 0, \ldots, 5$, eben gehört.

4.5 Stadtteilaufgabe

Hier sehen Sie einen regelmässig angelegten Stadtteil (die geraden Linien deuten Strassen an, die Kästchen Blocks).



4.3 Aufgabe. Zeigen Sie, dass es $\binom{m+n}{m}$ Möglichkeiten gibt, ohne Umwege von A nach B zu gelangen.

4.4 Aufgabe. Beweisen Sie folgende Formel

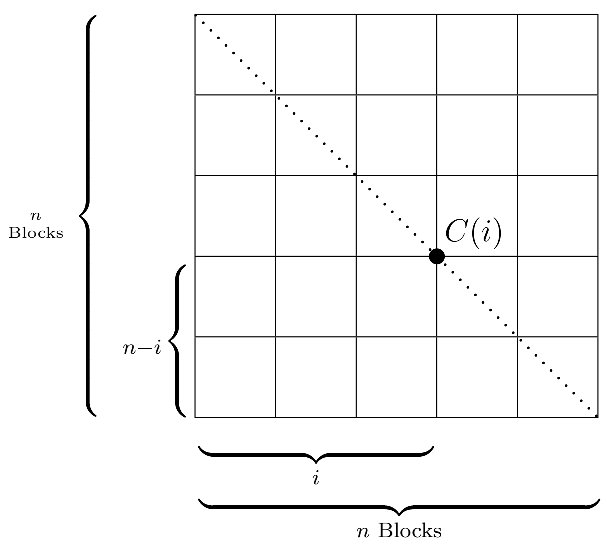
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

(a) indem Sie überlegen, wie n-elementige Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ „aussehen“,

(b) mit der Stadtteilaufgabe.

Idee zu (a): Jede $n-$elementige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ kann in eindeutiger Weise als Vereinigung einer $i-$elementigen Teilmenge von {1,. . . ,n} und einer $(n-i)-$elementigen Teilmenge von $\{n+1, \ldots, 2n\}$ für geeignetes i beschrieben werden.

Idee zu (b):



Jeder umweglose Weg von A nach B geht genau durch eine Ecke $C(i)$ mit den Koordinaten $(i, n-i)$. Sei $n(i)$ die Anzahl der Wege durch $C(i)$. Dann ist nach Aufgabe 4.3

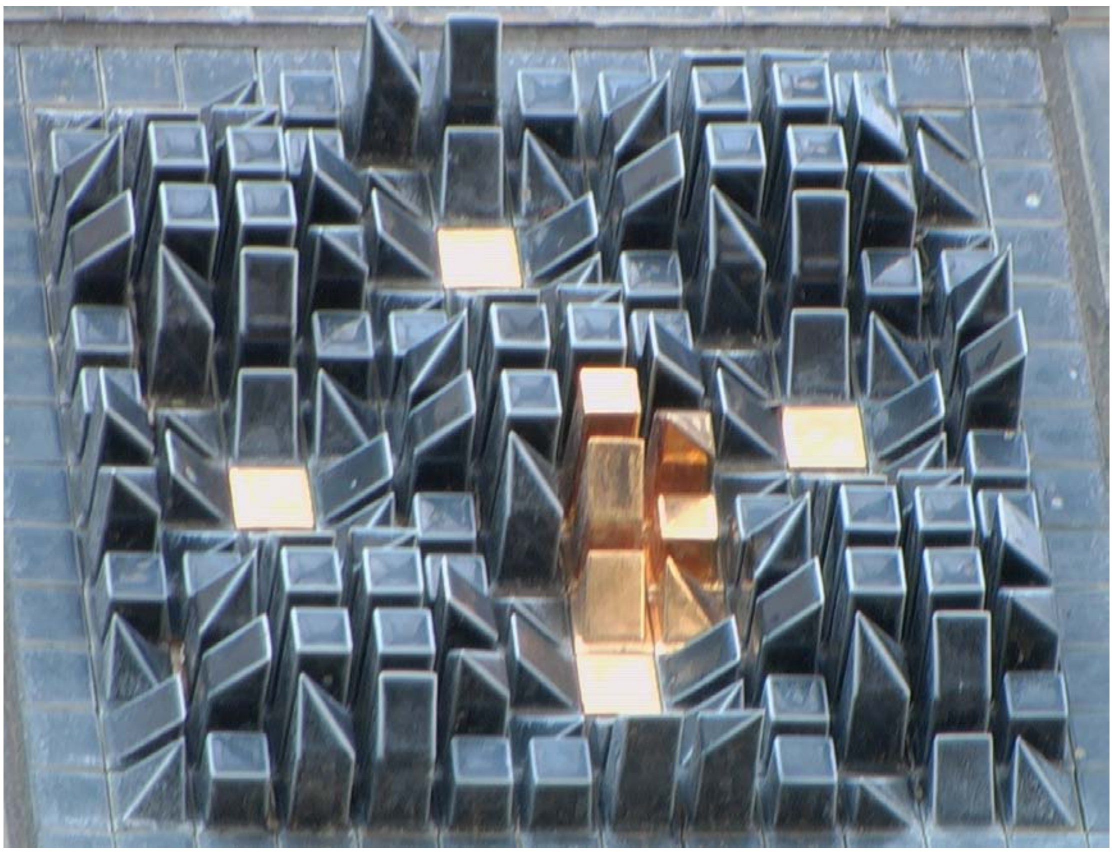
$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} n(i) \ .$$

Wir müssen also nur noch $n(i)$ als $\binom{n}{i}^2$ erkennen. Das sollte nicht so schwierig sein!

4.5 Aufgabe. Zeigen Sie die Formel

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

durch vollständige Induktion über k (oder auch mit Stadtteilüberlegungen).



4.6 Binomiallehrsatz

Dem Pascal'schen Dreieck begegnen wir sofort wieder in der Herleitung des Binomiallehrsatzes.

4.3 Satz. *Sei n eine natürliche Zahl, seien a, b reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ .$$

Erinnerung: Ist a reell, n natürlich, dann ist

$$a^n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0\,, \\ \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}} & \text{falls } n \geq 1\ . \end{cases}$$

Anmerkung: Im Folgenden benutzen wir stillschweigend eine Reihe von Rechenregeln für das Rechnen mit reellen Zahlen! (Folgerichtig gilt Satz 4.3 dann in jedem Zahlenbereich, in dem nach diesen Regeln gerechnet werden darf). Rekapitulieren Sie doch nach dem Beweis von Satz 4.3 einige der benötigten Regeln!

Beweis durch Induktion nach n:

$n = 0:$ $(a+b)^0 = 1,$ andererseits besteht
$\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$ aus dem einen Summanden $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.
Also ist die Aussage für $n = 0$ richtig.

$n = 1:$ $(a+b)^1 = (a+b)$
$\sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$.

$n = 2:$ Dann liegt die berühmt-berüchtigte Formel
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
vor.

Damit haben wir dem Induktionsanfang mehr als Genüge getan.

Induktionsschritt: Wir nehmen $n \geq 0$ an und gehen von

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

aus. Wir multiplizieren diese Gleichung auf beiden Seiten mit $(a+b)$:

$$(a+b)^n (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a+b)$$

Auf der linken Seite haben wir dann $(a+b)^{n+1}$ (nach Definition).

Wir wollen nun zeigen, dass die rechte Seite gleich

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

ist.

Die rechte Seite rechnen wir so aus, dass wir jeden Summanden der Summe $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ mit jeweils a und b multiplizieren und „geschickt“ zusammenfassen wie folgt (Pascal-Dreieck):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \binom{n}{0}a^n & + & \binom{n}{1}a^{n-1}b & + & \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 & + \ \dots \ + & \binom{n}{n-1}ab^{n-1} & + & \binom{n}{n}b^n & \\
\swarrow \cdot a & \searrow \cdot b & \swarrow \cdot a & \searrow \cdot b & \swarrow \cdot a & & & \searrow \cdot b & \swarrow \cdot a & \searrow \cdot b & \\
\binom{n+1}{0}a^{n+1} & + & \binom{n+1}{1}a^n b & + & \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + & \dots \ \dots & + & \binom{n+1}{n}ab^n & + & \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} &
\end{array}$$

m. a. W.:

Wir multiplizieren jeweils $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ mit b und $\binom{n}{k+1}a^{n-k-1}b^{k+1}$ mit a und addieren:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \cdot b + \binom{n}{k+1}a^{n-k-1}b^{k+1} \cdot a = \\
&= \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right) a^{n-k}b^{k+1} = \binom{n+1}{k+1}a^{n+1-(k+1)}b^{k+1}
\end{aligned}$$

wegen der Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten ($k = 0, \dots, n-1$).

Die Summanden $\binom{n+1}{0}a^{n+1}$ und $\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$ (Rand des Pascal-Dreiecks) bekommen wir dagegen wie angedeutet. Mit dem Summenzeichen zusammengefasst erhalten wir also

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{n+1-r} b^r \,.$$

□

NB. Für diesen Beweis brauchten wir keine explizite Formel für die Binomialkoeffizienten zu kennen.

Anmerkung: Es ist eleganter und auch klarer, den Induktionsschritt unter rigoroser Benutzung des Summenzeichens durchzuführen. Wenn Sie diese Rechnung sehen wollen – hier folgt sie:

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^{n-k} b^k\right)(a+b) = \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
= \quad & \tbinom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{\substack{\text{Den Laufindex ändern wir hier:} \\ \ell:=k+1, \text{ dann läuft } \ell \text{ von 1 bis } n.}} + \tbinom{n}{n} b^{n+1} \\
= \quad & \tbinom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \tbinom{n}{\ell-1} a^{n+1-\ell} b^\ell}_{\text{setze jetzt wieder } k:=\ell} + \tbinom{n}{n} b^{n+1} \\
= \quad & \tbinom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \tbinom{n}{n} b^{n+1} \\
= \quad & a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\tbinom{n}{k} + \tbinom{n}{k-1}\right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
= \quad & a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n+1} \tbinom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \ .
\end{aligned}
$$

4.6 Aufgabe. (a) Berechnen Sie $(1+1)^n$ nach dem Binomialsatz. Interpretation? (Vergl. Aufgabe 4.2)

(b) Berechnen Sie nun $(1-1)^n$ und folgern Sie, dass für $n \geq 1$ die Formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{2k} = 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$

gelten.

4.7 Von der Rekursionsformel zur expliziten Formel der Binomialkoeffizienten

Es ist günstig, gleich zu Beginn dieses Abschnitts folgende Festsetzung zu treffen:

4.2 Definition. *n Fakultät.*
Sei $n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir rekursiv $n!$ (gelesen: n Fakultät) durch

(i) $0! := 1$,

(ii) $(n+1)! := (n+1) \cdot (n!)$ für $n \geq 0$.

4.4 Beispiel: $1! = 1 \cdot (0!) = 1$, $2! = 2 \cdot (1!) = 2$, $3! = 3 \cdot (2!) = 6$. Allgemein ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

4.7 Aufgabe. Berechnen Sie 10!.

4.4 Satz. *Es ist* $\binom{n}{0} = 1$ *und für* $1 \leq k$ *ist*

$$\tbinom{n}{k} = \tfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Beweis: Mit den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ bilden wir die Funktion (tatsächlich ein Polynom) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Diese Funktion kennen wir nach dem Binomiallehrsatz „gut“, denn

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} x^k = f(x)\,.$$

Setzen wir auf beiden Seiten der Gleichung

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} x^k$$

$x = 0$, so erhalten wir:

$$1 = \tbinom{n}{0}\,.$$

Jetzt differenzieren wir einmal auf beiden Seiten, wir erhalten

$$n(1+x)^{n-1} = \tbinom{n}{1} + 2\tbinom{n}{2}x + 3\tbinom{n}{3}x^2 + \ldots$$

und, indem wir wieder $x = 0$ setzen, bekommen wir

$$\binom{n}{1} = n \quad \left(= \tfrac{n-1+1}{1!} \right).$$

Da das so gut läuft, differenzieren wir nun k-mal auf beiden Seiten:

$$n(n-1)\dots(n-k+1)(1+x)^{n-k} = \tbinom{n}{k}(k!) + (k+1)\cdot k \cdot \ldots \cdot 2 \cdot \tbinom{n}{k+1}x + \dots$$

Mit $x = 0$ ergibt sich:

$$\binom{n}{k} = \tfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Diese Herleitung funktioniert für $1 \le k \le n$. Die Formel ist aber auch für $k > n$ richtig, denn im Zähler kommt dann 0 als Faktor vor. □

Anmerkung: Im nächsten Kapitel „Kombinatorik“ bringen wir eine direktere und anschaulichere Herleitung der expliziten Formel der Binomialkoeffizienten.

4.8 Aufgabe. (a) Berechnen Sie $\binom{49}{6}$.

(b) Berechnen Sie $\binom{49}{43}$.

4.9 Aufgabe. Überzeugen Sie sich mit den expliziten Formeln von der Symmetrie und der Rekursionsformel der Binomialkoeffizienten.

4.5 Satz. *Für $0 \le k \le n$ ist*

$$\binom{n}{k} = \tfrac{n!}{(k!)((n-k)!)}$$

Beweis: Ist $k = 0$, so ist die rechte Seite $n!/n! = 1$, also $\binom{n}{0} = 1$. Für $k \ge 1$ ist $n! = n(n-1)\dots(n-k+1)((n-k)!)$, also können wir in dem Bruch $\frac{n!}{(k!)((n-k)!)}$ die Zahl $(n-k)!$ wegkürzen und erhalten

$$\binom{n}{k} = \tfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

□

4.10 Aufgabe. In einer zehnköpfigen Kommission hat jedes Mitglied eine Stimme. Wieviele mögliche Mehrheiten (Teilmengen von mindestens 6 Elementen gibt es?

4.11 Aufgabe. Zeigen Sie allgemeiner: In einer $2n$-köpfigen Kommission gibt es

$$\tfrac{1}{2}\big(2^{2n} - \tbinom{2n}{n}\big)$$

Möglichkeiten der Mehrheitsbildung.

Appendix

Eine Rekursionsformel für $\sum\limits_{k=1}^{n} k^r$

Rufen wir uns die Überlegungen im Anschluß an Aufgabe 3.2 in Erinnerung. Wir hatten eine Möglichkeit gesehen, eine Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ zu finden:

Nach dem Binomiallehrsatz können wir ausrechnen:

$$(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1\,.$$

Damit ergibt sich

$$(n+1)^4 = \sum_{i=0}^{n} \big((i+1)^4 - i^4\big) = 4\big(\sum_{i=0}^{n} i^3\big) + 6\big(\sum_{i=0}^{n} i^2\big) + 4\big(\sum_{i=0}^{n} i\big) + \sum_{i=0}^{n} 1\,.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$S(r) := \sum_{k=1}^{n} k^r\,.$$

(Anmerkung: Für $r \geq 1$ ist $\sum\limits_{k=1}^{n} k^r = \sum\limits_{k=0}^{n} k^r$, nur $\sum\limits_{k=0}^{n} k^0 = S(0) + 1$).

Also gilt:

$$(n+1)^4 = 4S(3) + 6S(2) + 4S(1) + S(0) + 1\,.$$

Diese Gleichung können wir nach $S(3)$ auflösen und bekommen

$$S(3) = \frac{1}{4}((n+1)^4 - 6S(2) - 4S(1) - S(0) - 1)\,.$$

4.12 Aufgabe. Beweisen Sie $S(3) = (S(2))^2$.

4.6 Satz. *Man kann rekursiv eine Formel für $S(r)$ finden wie folgt: Rekursionsanfang ist $S(0) = n$, die Rekursionsformel ist*

$$S(r+1) = \tfrac{1}{r+2}\Big((n+1)^{r+2} - \sum_{\ell=0}^{r} \tbinom{r+2}{\ell} S(\ell) - 1\Big)$$

Beweis: Wir spielen den Trick allgemein durch.

$$\begin{aligned}
(n+1)^{r+2} &= \sum_{i=0}^{n} \Big((i+1)^{r+2} - i^{r+2}\Big) = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{\ell=1}^{r+2} \tbinom{r+2}{\ell} i^{r+2-\ell}\Big) = \\
&= \sum_{\ell=1}^{r+2} \Big(\sum_{i=0}^{n} \tbinom{r+2}{\ell} i^{r+2-\ell}\Big) = 1 + \sum_{\ell=1}^{r+2} \tbinom{r+2}{\ell} S(r+2-\ell) = \\
&= 1 + \sum_{\ell=1}^{r+2} \tbinom{r+2}{r+2-\ell} S(r+2-\ell) = 1 + \sum_{k=0}^{r+1} \tbinom{r+2}{k} S(k)\,.
\end{aligned}$$

Auflösen nach $S(r+1)$ ergibt die behauptete Formel. □

4.8 Literaturliste

Zu den Binomialkoeffizienten und dem Binomiallehrsatz findet man etwas in den meisten Lehrbüchern zur Analysis oder zur Kombinatorik.

1. H. v. Mangoldt, K. Knopp: Einführung in die Höhere Mathematik. Band I. Viele verschiedene Auflagen.

   Dieses Buch ist ehrwürdig–alt; in dem hier relevanten Kapitel „Kombinatorik“ ist die Darstellung ausführlich und sehr angenehm.

2. I. Anderson: A first Course in Combinatorial Mathematics. 2. Auflage. Clarendon Press, 1989.

   Empfohlen zum Appendix:

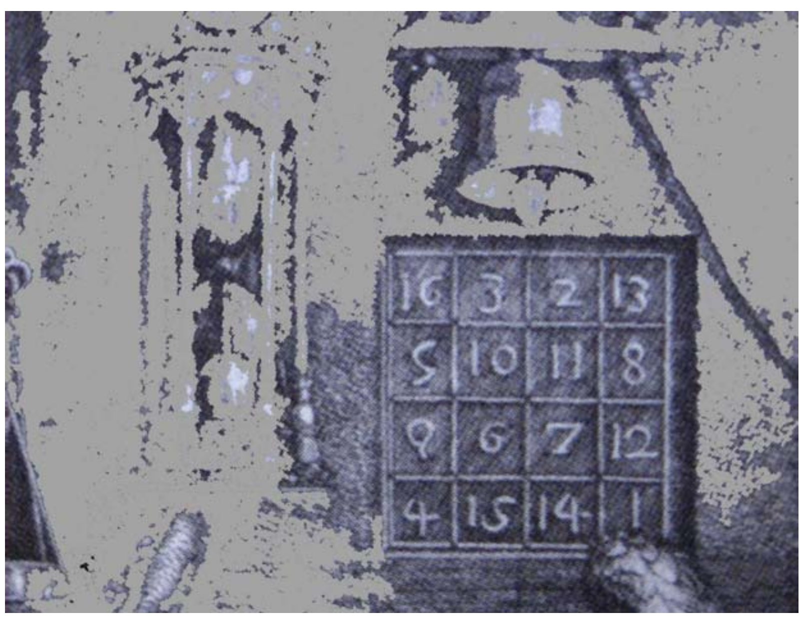
3. G. Pólya: Vom Lösen Mathematischer Aufgaben. Birkhäuser Verlag, 1966.

5 Ein Blick in die Kombinatorik

Gegeben sei eine Anzahl von Objekten und eine Reihe von Regeln, aus diesen Objekten ein Arrangement zu bilden. Dann können wir uns die Frage stellen, gibt es überhaupt ein solches Arrangement wie verlangt? Und, wenn ein solches Arrangement möglich ist, wieviele gibt es?

5.1 Beispiel: Auf wieviele verschiedene Weisen kann ich einen 500–Euroschein in kleinere Scheine wechseln, wenn mir von jeder Sorte beliebig viele zur Verfügung stehen? Das Problem kann in die folgende mathematische Form gebracht werden:
Finde die Anzahl der 6-Tupel natürlicher Zahlen $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ mit $5x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 100x_5 + 200x_6 = 500$.

5.2 Beispiel: In einem magischen Quadrat der Ordnung n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sollen die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$ so in einem quadratischen Schema mit n Spalten und n Zeilen angeordnet werden, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich ist. Hier ist ein Bild des berühmten magischen Quadrates der Ordnung 4 von A. Dürer, welches bekanntlich noch weitere Bedingungen erfüllt:



5.1 Aufgabe. Wie gross ist die Summe der Zahlen in einer Zeile bei einem magischen Quadrat der Ordnung n?

Offenbar ist die Frage der Existenz eines solchen Arrangements für beliebiges n schon ein Problem (das wir hier nicht lösen wollen). Wir werden uns mit einfacheren Arrangements beschäftigen und im wesentllichen die vier Grundaufgaben der Kombinatorik (dies in einer etwas altertümlichen Sprechweise) lösen. Insbesondere erhalten wir eine direkte Herleitung der expliziten Formel für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

5.2 Aufgabe. Schreiben Sie doch mal eben ein magisches Quadrat der Ordnung 3 auf, welches die zusätzliche Eigenschaft hat, dass auch die Summe der Zahlen in jeder der Diagonalen 15 ergibt.

Gibt es ein solches Quadrat mit der Ziffer 9 im zentralen Feld?

Das Kapitel teilen wir in folgende Abschnitte:

5.1 Kombinationen mit Berücksichtigung der Anordnung

Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Seien n verschiedene Objekte gegeben und k verschiedene Plätze.

5.1 Definition. Eine k-Kombination aus diesen Objekten mit Berücksichtigung der Anordnung ist eine Platzierung von k von diesen Objekten auf die gegebenen k Plätze.
Wenn die Plätze durch $1, \ldots, k$ durchnumeriert sind, dann können wir auch von einer Reihenfolge sprechen (Anordnung), denn wir haben dann ein erstes Objekt, ein zweites Objekt usw.

5.3 Beispiel: Sei $M = \{a, b, c, d, +\}$ und $k = 3$. Dann haben wir die 3-Kombinationen: $abc, abd, ab+, acb, acd, ac+, \ldots$ usw. aus den Elementen von M. (Wir schreiben die Kombinationen einfach durch Aneinanderreihen der ”Buchstaben”hin).

5.3 Aufgabe. Eine Familie mit 5 Mitgliedern möchte die Anzahl der Teams bestimmen, die aus je dreien der Mitglieder mit den jeweiligen Aufgaben „Einkaufen, Kochen und Abwaschen“ gebildet werden können.
Wieviele sind es?

Video: Teambildung

5.1 Satz. *Sei M eine Menge mit n Elementen. Dann gibt es ebenso viele injektive Abbildungen $\{1, ..., k\} \longrightarrow M$ wie k-Kombinationen aus den Elementen von M mit Berücksichtigung der Anordnung.*

Beweis: Eine injektive Abbildung $\alpha : \{1, ..., k\} \longrightarrow M$ bestimmt k Elemente auf den mit 1 bis k numerierten Plätzen durch $\alpha(1)$ bis $\alpha(k)$. Umgekehrt bestimmen die Mitglieder einer k-Kombination $m_1 \ldots m_k$ mit Berücksichtigung der Anordnung die injektive Abbildung $\{1, \ldots, k\} \longrightarrow M$, $i \longmapsto m_i$. Damit haben wir eine bijektive Abbildung (vergl. Definition 2.10) von der Menge der injektiven Abbildungen $\{1, \ldots, k\} \longrightarrow M$ auf die Menge der k-Kombinationen mit Berücksichtigung der Anordnung aus den Elementen von M zusammen mit ihrer Umkehrung konstruiert. $\square$

In Beispiel 5.3 wird eine weitere Interpretation dessen, was eine k-Kombination (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) ist, suggeriert. Wir können nämlich die Menge M als ein Alphabet mit n Buchstaben ansehen und dann eine k-Kombination als ein Wort mit k verschiedenen Buchstaben des Alphabets ansehen.

Sei nun $i_{n,k}$ die Anzahl solcher Wörter der Länge k über einem Alphabet mit n Buchstaben. Wir wollen $i_{n,k}$ bestimmen.

Zunächst ist $i_{n,k} = 0$, falls $n < k$ ist.

Für $k = 0$ gibt es nur das leere Wort als Wort der Länge 0, also ist $i_{n,0} = 1$.

Ist $k = 1 \leq n$, dann gibt es genau n Wörter der Länge 1 (mit lauter verschiedenen Buchstaben), d.h. $i_{n,1} = n$.

Sei $k = 2 \leq n$. Dann wissen wir aus Satz 3.6, dass es n^2 Wörter (ohne Einschränkung an die Wiederholbarkeit der Buchstaben) der Länge 2 gibt. Wieviele davon müssen wir streichen, um nur Wörter mit verschiedenen Buchstaben zu bekommen?

Das sind die n Wörter, die nur aus einem Buchstaben gebildet sind. Also bekommen wir $i_{n,2} = n^2 - n = n(n-1)$ 2-Kombinationen.

5.2 Satz. *Für jede natürliche Zahl n genügen die Zahlen $i_{n,\ell}$ der Rekursionsformel*

$$i_{n,k+1} = i_{n,k}(n-k)\,, \quad k \geq 0\,.$$

Beweis: Sei zunächst $k < n$. Dann betrachten wir alle Wörter mit k verschiedenen Buchstaben über einem Alphabet mit n Buchstaben. Aus jedem dieser Wörter können wir ein Wort mit $(k+1)$ verschiedenen Buchstaben machen, indem wir einen der jeweils verbleibenden $(n-k)$ Buchstaben anhängen.

Sei z.B. $M = \{a, b, c, d, +\}$ und gegeben sei das Wort ad. Daraus erhalten wir adb, adc und $ad+$, also $5 - 2 = 3$ Wörter mit verschiedenen Buchstaben der Länge 3.

Auf diese Weise erhalten wir genau alle gesuchten Wörter der Länge $k+1$, also ist deren Anzahl $i_{n,k+1} = i_{n,k}(n-k)$.

Für $k \geq n$ ist $i_{n,k+1} = 0$. Aber es ist auch $i_{n,k}(n-k) = 0$, denn für $n = k$ ist $(n-k) = 0$ und für $k > n$ ist auch $i_{n,k} = 0$. □

5.3 Satz. *Es ist* $i_{n,k} = n(n-1)...(n-k+1)$ *für* $k \geq 1$.

Beweis: Wir beweisen die Formel $i_{n,k} = n(n-1)...(n-k+1)$ durch vollständige Induktion über $k \geq 1$.

Induktionsanfang: Sei $k = 1$. Dafür haben wir schon $i_{n,1}$ als n bestimmt (auch für $n = 0$), also ist die Formel richtig.

Induktionsschritt: Es ist $i_{n,k+1} = i_{n,k}(n-k)$ nach der Rekursionsformel, nach Induktionsvoraussetzung ist daher $i_{n,k+1} = n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k) = n(n-1)\dots(n-(k+1)+1)$, d.h. die Formel gilt für $k+1$. □

Anmerkung: Es ist $i_{n,n} = n!$ (zur Definition von $n!$ vergl. Definition 4.2) gleich der Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1, 2, \dots, n\}$ in eine Menge M mit n Elementen. Eine solche Abbildung ist eine Bijektion. Deshalb ist $n!$ gleich der Anzahl der bijektiven Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ auf M oder, allgemeiner formuliert, von einer Menge N mit n Elementen auf M.

5.2 Permutationen

5.2 Definition. *Permutation.*
Sei M eine Menge. Eine Permutation von M ist eine bijektive Abbildung $\sigma : M \longrightarrow M$. Die Menge der Permutationen von M werde mit $\mathcal{S}_M$ bezeichnet (Der Buchstabe $\mathcal{S}$ deutet dabei auf „Symmetrie“ von M” hin). Für die leere Menge kommen wir überein, dass $\mathcal{S}_\varnothing$ genau ein Element hat.
Mit $\mathcal{S}_n$ werde die Menge der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet; $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}_\varnothing$.

Am Ende des letzten Abschnitts sind wir stillschweigend davon ausgegangen, dass für zwei Mengen A, B mit der gleichen Anzahl n von Elementen die Anzahl der bijektiven Abbildungen $A \longrightarrow B$ nur von n abhängt. Und wir konnten sie als $n!$ identifizieren.

Seien nun M und N gleichmächtige Mengen (vergl. Definition 2.14) Wie können wir formal zeigen, dass dann auch $\mathcal{S}_M$ und $\mathcal{S}_N$ gleichmächtig sind?

5.4 Beispiel: Nehmen wir die Mengen $\{1, \dots, n\}$ und $K = \{k+1, \dots, k+n\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ fest. Für $\sigma \in \mathcal{S}_n$ definieren wir $F(\sigma) : K \longrightarrow K$ durch die Formel $F(\sigma)(x) := k + \sigma(x-k)$, oder einfacher geschrieben, $F(\sigma)(k+\ell) := k + \sigma(\ell)$

für $\ell = 1, \ldots, n$. Damit erhalten wir eine Abbildung $F : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_K$, die (Spezialfall des folgenden Satzes) eine Bijektion ist.

Die Abbildung F hat noch eine weitere interessante Eigenschaft. Dazu haben wir uns an die Komposition von Abbildungen in Definition 2.11 zu erinnern. Insbesondere ist die Komposition von Bijektionen wieder eine Bijektion. D.h. für je zwei Permutationen einer Menge ist deren Komposition wieder eine Permutation der Menge.

Die Abbildung F hat die Eigenschaft:

$$\bigwedge_{\sigma,\tau\in\,\mathcal{S}_n} F(\sigma\circ\tau) = F(\sigma)\circ F(\tau)$$

Um diese Gleichung zu zeigen, müssen wir jede der Abbildungen (rechte Seite und linke Seite der Gleichung) auf $k+\ell$ anwenden und möglichst das gleiche herausbekommen, $\ell = 1, \ldots, n$. Es ist nun $F(\sigma\circ\tau)(k+\ell) = k + (\sigma\circ\tau)(\ell) = k+\sigma(\tau(\ell))$, und $(F(\sigma)\circ F(\tau))(k+\ell) = F(\sigma)(F(\tau)(k+\ell)) = F(\sigma)(k+\tau(\ell)) = k+\sigma(\tau(\ell))$. Also alles klar ?

Sind $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_M$, so ist die Komposition $\sigma\circ\tau$ eine „neue“ Permutation in $\mathcal{S}_M$. Die Abbildung $\mathcal{S}_M \times \mathcal{S}_M \longrightarrow \mathcal{S}_M$, $(\sigma,\tau) \longmapsto \sigma\circ\tau$, wollen wir im folgenden „Multiplikation auf der Menge $\mathcal{S}_M$“ nennen. Für diese Multiplikation gelten nun die folgenden Rechenregeln:

(1) Die Multiplikation ist assoziativ, d.h.

$$\bigwedge_{\rho,\sigma,\tau\in\,\mathcal{S}_M} (\rho\circ\sigma)\circ\tau = \rho\circ(\sigma\circ\tau)$$

(2) $$\bigvee_{\rho\in\,\mathcal{S}_M}\ \bigwedge_{\sigma\in\,\mathcal{S}_M} \sigma\circ\rho = \rho\circ\sigma = \sigma$$

(Man nehme für ρ die Abbildung id_M).

(3) $$\bigwedge_{\sigma\in\,\mathcal{S}_M}\ \bigvee_{\kappa\in\,\mathcal{S}_M} \sigma\circ\kappa = \kappa\circ\sigma = \rho$$

(Für κ nehme man die zu σ inverse Abbildung σ^{-1}).

5.3 Definition. *Gruppe.*
Eine Menge G zusammen mit einer Multiplikation $G\times G \longrightarrow G$, $(\sigma,\tau) \longmapsto \sigma\circ\tau$, die den Eigenschaften (1), (2), (3) genügt, nennt man eine „Gruppe“.

Im folgenden werden wir diesen Begriff nicht weiter verfolgen (Das werden Sie in den Vorlesungen über Lineare Algebra tun.), sondern uns darauf beschränken, mit der Multiplikation in den Gruppen $\mathcal{S}_M$ umzugehen.

5.4 Satz. *Seien die Mengen M und N gleichmächtig. Dann gibt es eine Bijektion $F: \mathcal{S}_M \longrightarrow \mathcal{S}_N$, die sich mit den Multiplikationen auf $\mathcal{S}_M$ und $\mathcal{S}_N$ verträgt, d.h. für alle $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_M$ ist $F(\sigma \circ \tau) = F(\sigma) \circ F(\tau)$.*

Beweis: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Bijektion. Dann setzen wir $F: \mathcal{S}_M \longrightarrow \mathcal{S}_N$, $\sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$, mit einem Diagramm angedeutet:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\sigma"'] & N \arrow[l, "f^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "F(\sigma)"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Ferner setzen wir $G: \mathcal{S}_N \longrightarrow \mathcal{S}_M$, $\tau \longmapsto f^{-1} \circ \tau \circ f$,

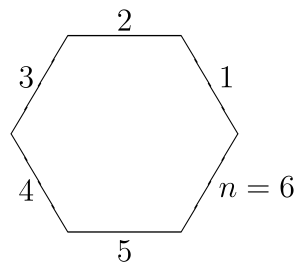
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "G(\tau)"'] & N \arrow[d, "\tau"] \\ M & N \arrow[l, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Für alle $\sigma \in \mathcal{S}_M$ gilt dann $(G \circ F)(\sigma) = G(F(\sigma)) = G(f \circ \sigma \circ f^{-1}) = f^{-1} \circ (f \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ f = (f^{-1} \circ f) \circ \sigma \circ (f^{-1} \circ f) = \sigma$ (Assoziativität und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$). Entsprechend ist $(F \circ G)(\tau) = \tau$ für alle $\tau \in \mathcal{S}_N$. Also sind F, G invers zueinander.

Seien nun $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_M$, dann ist $F(\alpha \circ \beta) = f \circ (\alpha \circ \beta) \circ f^{-1} = (f \circ \alpha \circ f^{-1}) \circ (f \circ \beta \circ f^{-1}) = F(\alpha) \circ F(\beta)$. □

Bemerkung: Die Abbildung $F: \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_k$ in Beispiel 5.4 wurde natürlich auf diese Weise mit der Bijektion $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow K$, $x \longmapsto k + x$, konstruiert.

5.4 Aufgabe. Wir setzen die Elemente $\{1, \ldots, n\}$ ordentlich um einen regelmäßigen n-Ecktisch, wie hier für $n = 6$ angedeutet.



Jedes i hat dann zwei direkte Nachbarn, z.B. hat 6 die Nachbarn $5, 1$ und 1 die Nachbarn $6, 2$.

Wieviele Permutationen $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gibt es, für die gilt: Wenn immer i, j direkte Nachbarn sind, dann sind es auch $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$?

Konkret für $n = 6$?

5.5 Aufgabe. Es sei $A(i) \subset \mathcal{S}_n$ die Teilmenge $\{\sigma \mid \sigma(i) = i\}$. Wieviele Elemente hat $A(1) \cap A(6) \subset \mathcal{S}_6$?

Achtung: Bevor wir weitermachen, müssen wir noch etwas nachtragen, was wir schon in Definition 2.8 hätten erledigen sollen.

5.4 Definition. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, sei $A \subset M$. Dann sei $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subset N$. Wir nennen $f(A)$ „das Bild der Menge A unter der Abbildung f“.

5.5 Beispiel: Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch

$$x \longmapsto \begin{cases} x/2 & \text{für } x \text{ gerade,} \\ x & \text{für } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist $f(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{0, 1, 2, 3\}$.

5.6 Aufgabe. Schreiben Sie einmal alle Permutationen $\sigma \in \mathcal{S}_5$ auf — in der Schreibweise von Beispiel 2.12 —, für die $\sigma(\{1, 2\}) \subset \{1, 2\}$ gilt. Wieviele sind es ?

5.7 Aufgabe. Sei $0 \leq k \leq n$. Wieviele Elemente hat die Teilmenge $G := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(\{1, \ldots, k\}) \subset \{1, 2, \ldots, k\}\}$ von $\mathcal{S}_n$?

Hinweis: Machen Sie sich zuerst klar, dass die Bedingung an σ bedeutet, dass σ jedes Element von $\{1,\ldots,k\}$ in ein Element von $\{1,\ldots,k\}$ überführt und damit jedes Element von $\{k+1,\ldots,n\}$ in ein Element von $\{k+1,\ldots,n\}$. Damit hat man die Möglichkeit, eine Abbildung

$$G \longrightarrow \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_{n-k}$$

zu definieren. Bleibt zu zeigen, dass diese bijektiv ist.

5.8 Aufgabe. Sei $A \subset \{1,2,\ldots,n\}$ eine Teilmenge mit k Elementen. Zeigen Sie, dass

$$G_A := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(\{1,\ldots,k\}) = A\}$$

genau $(k!)(n-k)!$ Elemente hat.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Bijektion von G_A auf G (aus Aufgabe 5.7) wie folgt: Wählen Sie ein Element $\tau \in G_A$ fest und definieren Sie zwei Abbildungen

$$G_A \longrightarrow G\,,\ \sigma \longmapsto \tau^{-1} \circ \sigma\,,$$

$$G \longrightarrow G_A\,,\ \kappa \longmapsto \tau \circ \kappa\,.$$

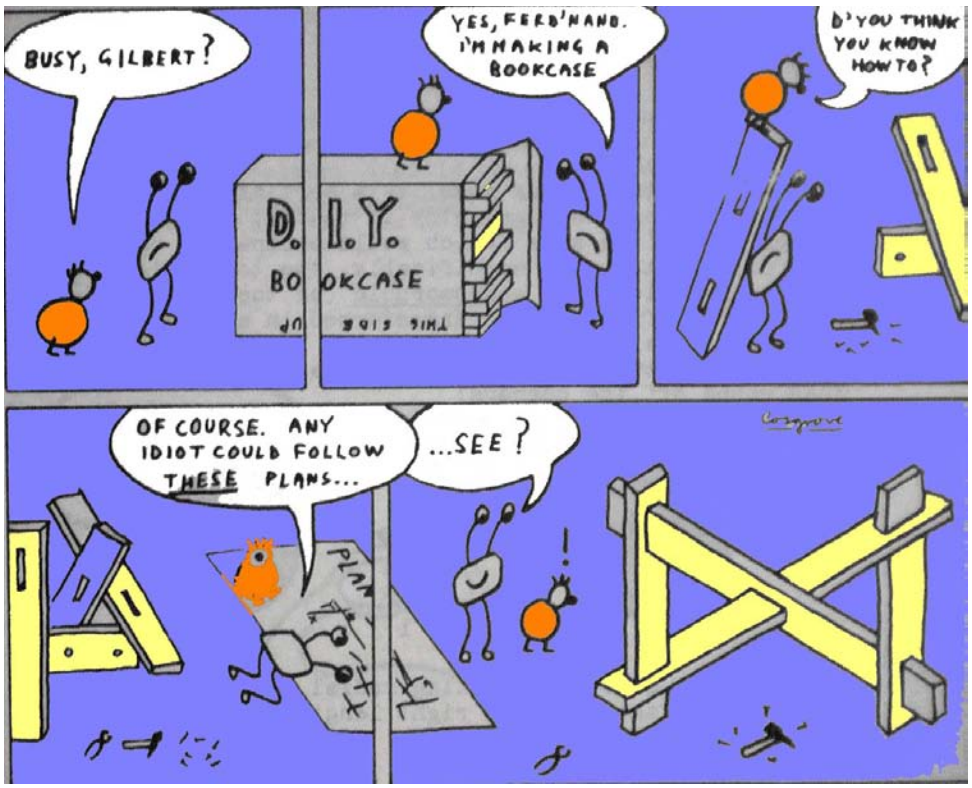
Rechnen Sie nun nach, dass diese invers zueinander sind. (Es ist $G = G_{\{1,\ldots,k\}}$).

Zum Schluss dieses Abschnitts möchten wir noch zeigen, wie man aus dem Ergebnis von Aufgabe 5.8 eine explizite Formel für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erhalten kann. Wir erinnern daran: Die Zahl $\binom{n}{k}$ ist definiert als die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

5.5 Satz. *Für* $0 \le k \le n$ *ist* $\binom{n}{k} = n!\big/((k!)(n-k)!)$

Beweis: Für $n = 0$ ist die Formel richtig. Sei also $n \ge 1$. Sei E_k die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$. Für $A \in E_k$ haben wir eine Teilmenge $G_A \subset \mathcal{S}_n$ definiert, sodass gilt: Sind $A, B \in E_k$, $A \ne B$, dann ist $G_A \cap G_B = \varnothing$. Denn ein $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $\sigma(\{1,\ldots,k\}) = A$ hat nicht gleichzeitig die Eigenschaft $\sigma(\{1,\ldots,k\}) = B$. Die Vereinigung $\bigcup\limits_{A \in E_k} G_A$ ist gleich $\mathcal{S}_n$, da für eine beliebige Permutation σ gilt, $\sigma \in G_{\{\sigma(1),\ldots,\sigma(k)\}}$. Die Mengen G_A bilden also eine Zerlegung von $\mathcal{S}_n$ in paarweise disjunkte Teilmengen. Alle

G_A haben die gleiche Anzahl $(k!)(n-k)!$ von Elementen. Also hat E_k gerade $n!/((k!)(n-k)!) = \binom{n}{k}$ Elemente. $\square$



5.3 Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung

5.5 Definition. Gegeben seien n verschiedene Objekte, $n \in \mathbb{N}$. Eine k-Kombination ohne Berücksichtigung der Anordnung aus diesen Objekten ist eine Auswahl von k dieser Objekte, also eine Menge mit k der Objekte als Elemente.

Fassen wir die n Objekte zu einer Menge zusammen, so sind diese k-Kombinationen also gerade die k-elementigen Teilmengen von M. Deren Anzahl $\binom{n}{k}$ wollen wir jetzt ein drittes Mal — mit der bisher einfachsten Methode — bestimmen.

5.9 Aufgabe. Ist ein Lotto–Tip nun eine 6-Kombination aus 49 Objekten mit Berücksichtigung der Anordnung oder ohne?

5.6 Satz. *Sei $1 \leq k \leq n$, dann ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen gleich $n(n-1)\dots(n-k+1)\big/(k!)$*

Beweis: Wir wissen nach 5.1, dass die Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ gleich $n(n-1)\dots(n-k+1)$ ist. Ist $A \subset \{1,\dots,n\}$ eine k-elementige Teilmenge, dann sei

$I_A := \{f : \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\} \mid f \text{ injektiv und Bild } (f) = A\}.$

Sei nun E_k die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1,2,\dots,n\}$. Dann stellen wir fest:

(i) $A, B \in E_k,\ A \neq B \Longrightarrow I_A \cap I_B = \varnothing$,

(ii) die Menge $\bigcup_{A \in E_k} I_A$ ist die Menge aller injektiven Abbildungen $\{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ („schön“ aufgeteilt in die Mengen I_A), sie hat $n(n-1)\dots(n-k+1)$ Elemente nach Satz 5.1 und Satz 5.3.

(iii) Jede der Mengen I_A hat $k!$ Elemente. Denn wir erhalten eine Bijektion von I_A auf die Menge der bijektiven Abbildungen $\{1,\dots,k\} \longrightarrow A$, in dem wir einem $\sigma : \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ aus I_A die Abbildung σ mit dem auf A eingeschränkten Zielbereich zuordnen.

Also ist die Anzahl der Elemente $\binom{n}{k}$ von E_k gerade

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\big/k!\,.$$

□

5.10 Aufgabe. Ist folgendes ein Verfahren, alle k-Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung aus den Objekten $a, b, c, \dots, x, y, z$ aufzulisten?

Wir schreiben in alphabetischer Reihenfolge alle Wörter der Länge k in den Buchstaben $a, b, c, \dots, x, y, z$ hin, in denen sich kein Buchstabe wiederholt und in denen die Buchstaben nur in der Reihenfolge des Alphabets aufeinanderfolgen.

Wenn Sie das Verfahren entsprechend auf die 3-Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung aus a, b, c, d, e, f anwenden, wie lautet dann Ihre 12-te 3-Kombination?

5.4 Kombinationen mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Anordnung

5.6 Definition. Seien n verschiedene, aber beliebig oft „reproduzierbare“ Objekte gegeben. (Jedes Objekt ist sozusagen das oberste in einem unendlichen Stapel von Kopien seiner selbst). Sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist eine k-Kombination aus diesen Objekten mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Anordnung eine in eine Reihenfolge gebrachte Auswahl von k (nun wiederholbaren) Objekten.

Bemerkung: Eine solche in eine Reihenfolge gebrachte Auswahl ist nichts anderes als ein Wort der Länge k über dem Alphabet mit den n Objekten als Buchstaben.

5.6 Beispiel: Gegeben die Objekte a, b, c, d, dann ist das Wort

$$abcdaaa$$

z. B. eine 7-Kombination dieser Art in den Objekten a, b, c, d.

Die Frage, wieviele solche k-Kombinationen aus n Objekten es gibt, haben wir schon in Satz 3.6 gelöst. Wir wiederholen:

5.7 Satz. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es n^k Wörter der Länge k in n Buchstaben.*

Alle Wörter der Länge k können wir in alphabetischer Reihenfolge auflisten. Sei z.B. a, b, c, d, e das Alphabet. Testen Sie Ihr Verständnis der alphabetischen Ordnung, indem Sie folgende Fragen beantworten ($k = 3$):

5.11 Aufgabe. Das wievielte Wort ist dcb?

5.12 Aufgabe. Wie lautet das 61-te Wort?

5.5 Kombinationen mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung

5.7 Definition. Eine k-Kombination mit Wiederholung aber ohne Berücksichtigung der Anordnung ist eine Auswahl von k Objekten aus n (beliebig reproduzierbaren) Objekten $a_1, \ldots, a_n$ (die wir uns wiederum als Stapel vorstellen); eine Reihung dieser k Objekte wird jedoch nicht vorgenommen.

Wie können wir uns eine derartige k-Kombination vorstellen oder aufschreiben ?

Seien dazu die Objekte als $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben. Wir müssen dann, um eine solche k-Kombination anzugeben, nur festlegen, wie oft wir a_1 „auftreten“ lassen, sagen wir x_1-mal, wie oft a_2, sagen wir x_2-mal, bis a_n, das wir x_n-mal „auftreten“ lassen, wobei die x_i die Bedingung $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = k$ zu erfüllen haben.

Aufschreiben können wir diese Auswahl in der Form

$$\underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{x_1\text{-mal}} \quad \underbrace{a_2 \ldots a_2}_{x_2\text{-mal}} \quad \cdots \quad \underbrace{a_n \ldots a_n}_{x_n\text{-mal}}$$

Damit haben wir gleich zwei Interpretationen einer k-Kombination mit Wiederholung und **ohne** Berücksichtigung der Anordnung gefunden:

Seien dazu die Objekte mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet und damit in eine Reihenfolge gebracht. Dann gilt:

(1) Die Menge derartiger k-Kombinationen ist gleichmächtig mit der Menge der Wörter der Länge k in den Buchstaben des Alphabets $a_1, \ldots, a_n$, in denen die Buchstaben nur in der Reihenfolge des Alphabets vorkommen.

5.7 Beispiel: Gegeben a, b, c. Dann haben wir folgende 3-Kombinationen:

$$\begin{array}{lll}
a\ a\ a & a\ b\ b & a\ c\ c \\
a\ a\ b & a\ b\ c & \\
a\ a\ c & & \\
b\ b\ b & \boxed{} & \\
\boxed{} & & \\
\boxed{} & &
\end{array}$$

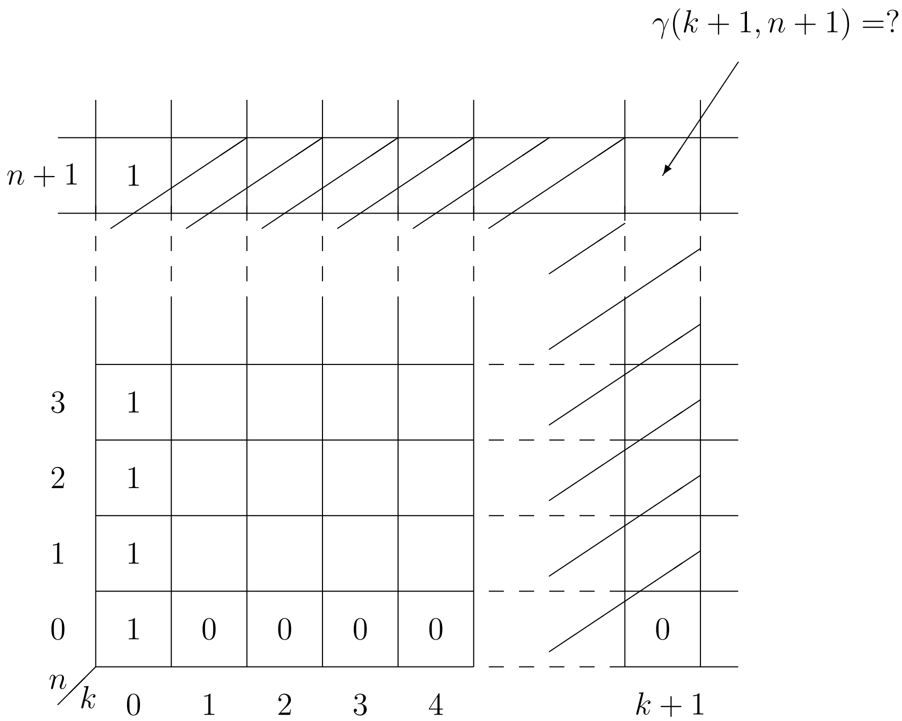
Ergänzen Sie selbst!

(2) Die Menge unserer k-Kombinationen ist gleichmächtig mit der Menge der n-Tupel natürlicher Zahlen $(x_1, \ldots, x_n)$ mit der Eigenschaft $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = k$.

Wir wollen nun mit Hilfe der 2. Interpretation eine Formel für die Anzahl derartiger k-Kombinationen aus n Objekten finden. Nennen wir diese Zahl doch erst einmal $\gamma(k, n)$.

Wir setzen $\gamma(k, 0) := 0$ für $k > 0$ und $\gamma(0, n) := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit haben wir einen Rekursionsanfang auf einem Spielbrett wie in 3.3:

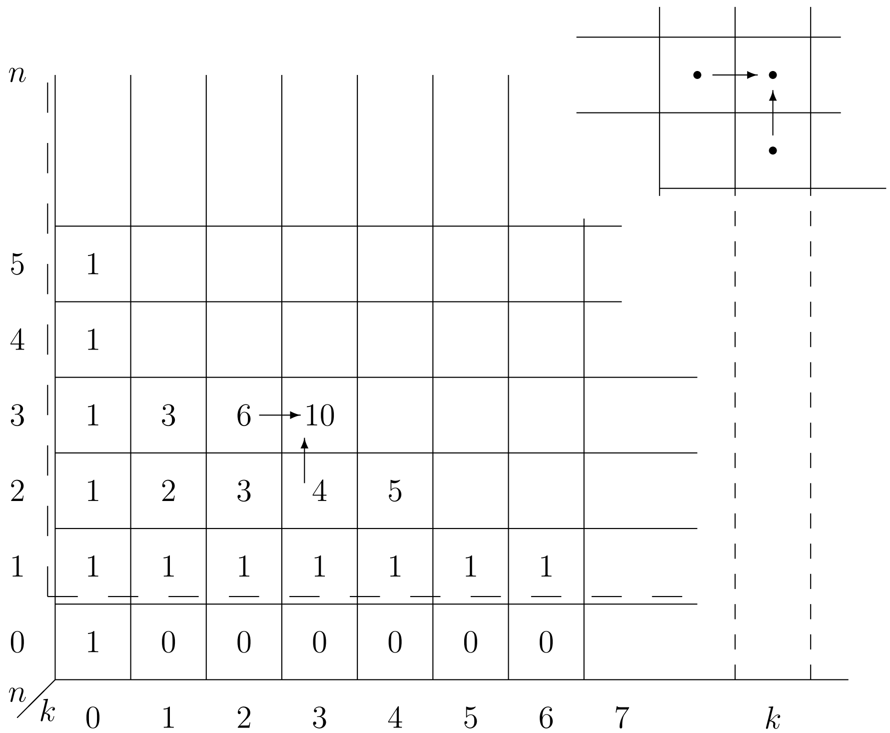


Jetzt müssen wir noch wissen, ob und, wenn ja, wie $\gamma(k+1,n+1)$ aus den $\gamma(\ell,j)$ mit $\ell<k+1$, $j\leq n+1$ bzw. $\ell\leq k+1$, $j<n+1$ zu berechnen ist.

Unter den $(n+1)$-Tupeln $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i=k+1$ fallen diejenigen mit $x_{n+1}=0$ auf. Davon gibt es genau so viele wie n-Tupel $(y_1,\ldots,y_n)$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = k+1$, also gerade $\gamma(k+1,n)$ viele. Andererseits gibt es genau so viele $(n+1)$-Tupel $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = k+1$ **und** $x_{n+1}>0$ wie es $(n+1)$-Tupel $(y_1,\ldots,y_{n+1})$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n+1} y_i=k$ gibt. Eine Bijektion zwischen den beiden Mengen wird durch die Zuordnung $(x_1,\ldots,x_{n+1})\longmapsto(x_1,\ldots,x_{n+1}-1)$ gestiftet. Deren Anzahl ist gerade $\gamma(k,n+1)$. Damit haben wir die gesuchte Rekursionsformel

$$\gamma(k+1,n+1)=\gamma(k,n+1)+\gamma(k+1,n)$$

erhalten.



Was sehen Sie?

Das durch eine gebrochene Linie umrandete Spielfeld ist das von Beispiel 3.8. Also ist $\gamma(k, n) = \beta(k, n-1)$ aus Beispiel 3.8, $k \geq 1$.

Nun schlägt die Stadtteilaufgabe 4.5 zu und liefert:

5.8 Satz. *Die Anzahl der k-Kombinationen aus n Objekten mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung ist*

$$\gamma(k, n) = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

5.13 Aufgabe. Für die kommende Woche bietet mir mein Koch als Auswahl zum Dinner 5 verschiedene Menus an. Er will sich aber nicht festlegen, an welchem Tag der Woche er welches serviert. Ich möchte auf jeden Fall jedes Menu wenigstens 1-mal probieren. Also habe ich die Auswahl unter allen 7-

Kombinationen von 5 Menus mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung unter der Nebenbedingung, dass jedes wenigstens 1-mal vorkommt.

Wieviele sind das ?

5.14 Aufgabe. In der darauffolgenden Woche bietet mein Koch wieder 5 Menus an, aber ich darf festlegen, an welchem Tag der Woche es welches gibt unter der Nebenbedingung, dass ich alle probiere.

Wieviele Möglichkeiten der kulinarischen Gestaltung der Woche gibt es ?

(a) Weniger als 500,

(b) zwischen 500 und 10 000,

(c) mehr als 10 000 ?

Die genaue Antwort können Sie in 5.6 ausrechnen !

5.6 Surjektive Abbildungen

Die Eigenwilligkeiten meines Kochs (Aufgaben 5.13, 5.14) haben uns motiviert, nach der Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1, \ldots, 7\}$ nach $\{1, \ldots, 5\}$ zu fragen, oder allgemeiner, nach der Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Darüberhinaus besteht natürlich ein gewisser Ehrgeiz, nach den injektiven und bijektiven Abbildungen auch die surjektiven zu betrachten.

Sei also $\sigma(k, n)$ die Anzahl der surjektiven Abbildungen
$\{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Wir halten zunächst Ausschau nach einer Rekursion auf dem unendlichen Spielbrett. Als Rekursionsanfang sollten wir nehmen:

$$\begin{aligned} \sigma(0, n) &= 0 \quad \text{für } n > 0\,, \\ \sigma(k, 0) &= 0 \quad \text{für } k > 0 \text{ und} \\ \sigma(0, 0) &= 1 \end{aligned}$$

$n \diagup k$	0	1	2	
3	0	$*$	$*$	
2	0	$*$		
1	0			
0	1	0	0	0

$\sigma(k, n) = 0$ für $k < n$.
(Im Bild ist also $* = 0$).

Wie finden wir nun eine Rekursionsformel?

Sei M die Menge aller surjektiven Abbildungen von $\{1, \dots, k, k+1\}$ nach $\{1, \dots, n+1\}$. Es sei $M_k \subset M$ die Teilmenge aller f mit $f(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, n+1\}$; dann ist $M_k = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} M_{k,i}$ mit $M_{k,i} = \{f \in M_k \mid f(k+1) = i\}$, $i = 1, \dots, n+1$. Es ist $M_{k,i} \cap M_{k,j} = \varnothing$ für $i \neq j$. Jedes $M_{k,i}$ hat nach Definition $\sigma(k, n+1)$ Elemente, also hat M_k dann $(n+1)\sigma(k, n+1)$ Elemente.

$$\{\,1, \dots\dots\dots, k\,,\ k+1\}$$

$$\{1, \dots, i, \dots, n+1\}$$

Nun betrachten wir $(M \setminus M_k) = \{f \in M \mid f(\{1, \dots, k\}) \neq \{1, \dots, n+1\}$; zu $f \in M \setminus M_k$ gibt es genau ein j mit $1 \leq j \leq n+1$, sodass $f(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, n+1\} \setminus \{j\}$ gilt und damit $f(k+1) = j$ ist.

$$\{\,1, \dots\dots\dots, k\,,\ k+1\}$$

$$\{1, \dots, j, \dots, n+1\}$$

Also können wir $(M \setminus M_k)$ aufteilen in die Mengen $(M \setminus M_k)_j := \{f \mid f(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, n+1\} \setminus \{j\}\}$, $j = 1, \dots, n+1$. Jede dieser Mengen hat $\sigma_{k,n}$ Elemente. Also gilt:

5.9 Satz. *Die $\sigma_{k,n}$ erfüllen die Rekursionsformel*

$$\sigma(k+1, n+1) = (n+1)\sigma(k, n+1) + (n+1)\sigma(k, n)\,.$$

Damit können wir das Spielbrett auffüllen:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
5	0	0	0					
4	0	0	0					
3	0	0	0	6	36			
2	0	0	2	6	14			
1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0

5.15 Aufgabe. Füllen Sie das Spielbrett auf, bis Sie $\sigma(7,5)$ erhalten haben.

5.16 Aufgabe. Sei $S(k,n) := \sigma(k,n)/n!$. Zeigen Sie, dass die $S(k,n)$ der Rekursionsformel

$$S(k+1, n+1) = (n+1)S(k, n+1) + S_{k,n}$$

genügen.

5.10 Satz. *Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$n^k = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \sigma(k, r)\,.$$

Beweis: Die linke Seite ist die Anzahl aller Abbildungen von $\{1,\ldots,k\}$ nach $\{1,\ldots,n\}$ (vergl. 5.4). Für jede Teilmenge $A \subset \{1,\ldots,n\}$ sei $M_A := \{f : \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\} \mid \mathrm{Bild}(f) = A\}$. Wenn A genau r Elemente hat, dann hat M_A genau $\sigma(k,r)$ Elemente. Wir bemerken, dass $M_A \cap M_B = \varnothing$ für $A \neq B$ und dass $\mathrm{Abb}(\{1,\ldots,k\},\{1,\ldots,n\}) = \bigcup\limits_{A\subset\{1,\ldots,n\}} M_A$.

Die Vereinigung derjenigen M_A, wo A die r-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ durchläuft, hat gerade

$$\tbinom{n}{r}\sigma(k,r)$$

Elemente. Also ist

$$n^k = \sum_{r=0}^{n} \tbinom{n}{r}\sigma(k,r)\,.$$

□

Anmerkung: Wenn wir die Gleichung in Satz 5.10 nacheinander für $n = 1,2,\ldots$ hinschreiben, bekommen wir für $k \geq 1$

$$\begin{array}{rcl}
1^k & = & \sigma(k,1) \\
2^k & = & \tbinom{2}{1}\sigma(k,1) + \tbinom{2}{2}\sigma(k,2) \\
3^k & = & \tbinom{3}{1}\sigma(k,1) + \tbinom{3}{2}\sigma(k,2) + \tbinom{3}{3}\sigma(k,3) \\
\vdots & & \\
n^k & = & \tbinom{n}{1}\sigma(k,1) + \tbinom{n}{2}\sigma(k,2) + \quad \ldots \quad + \tbinom{n}{n}\sigma(k,n)
\end{array}$$

Das ist eine weitere Rekursionsformel für die $\sigma(k,n)$. Es ist möglich, daraus eine explizite Formel abzuleiten; um das systematisch zu tun, müßten wir etwas ausholen, deshalb sei hier nur auf Nr.2 der folgenden Literaturliste, S. 141 ff, verwiesen.

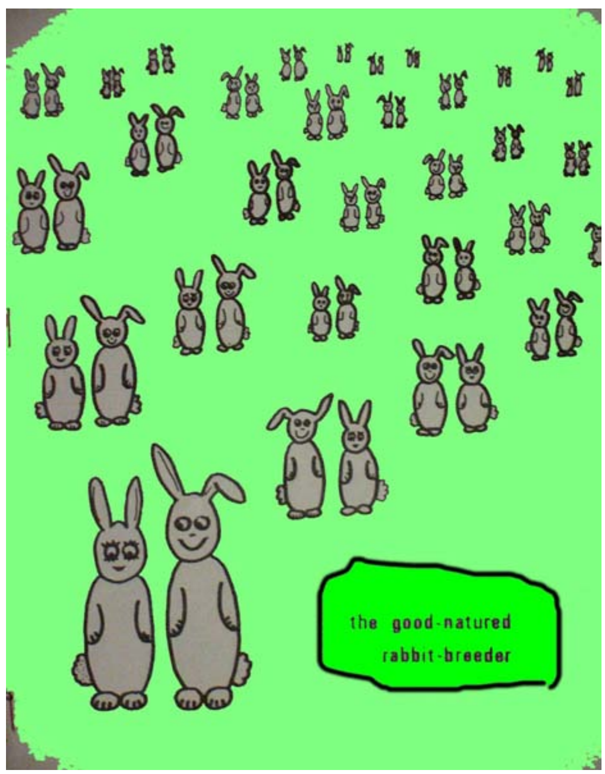
5.7 Literatur

1. H. v. Mangoldt, K. Knopp: Einführung in die Höhere Mathematik. Band I. Viele verschiedene Auflagen. (Für einen Kommentar schauen Sie 4.8 Literaturliste).

2. M. Aigner: Kombinatorik I. Hochschultext. Springer-Verlag 1975.

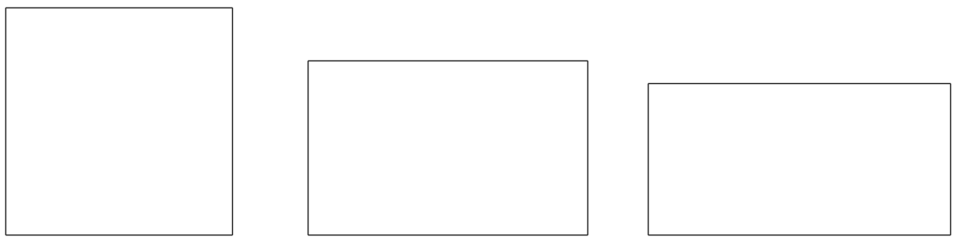
6 Die Fibonacci–Zahlen

In diesem Kapitel werden wir nicht nur eine explizite Formel für die Fibonacci–Zahlen f_n (definiert in Definition 3.5) finden, sondern auch zeigen, was diese Zahlen mit dem goldenen Schnitt und schließlich noch den Binomialkoeffizienten zu tun haben. Hier sind die Abschnitte des Kapitels:

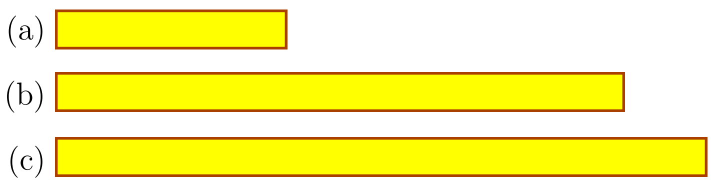


6.1 Die Fibonacci–Zahlen und der goldene Schnitt

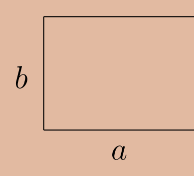
Welches der folgenden Rechtecke erscheint Ihnen besonders harmonisch?



(a) (b) (c)



6.1 Definition. *Goldener Schnitt.*
Ein Rechteck mit den Seiten $a, b > 0$ ist nach dem goldenen Schnitt konstruiert, wenn $b/a = a/a + b$ gilt. (Wir denken uns b als die kleinere Seite).



Seit der Antike wird behauptet, dass uns ein solches Rechteck bzw. eine solche Unterteilung (Schnitt) der Strecke $a + b$ in die Stücke a, b besonders harmonisch erscheint.

6.1 Satz. *In einem „goldenen“ Rechteck ist* $b/a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Beweis: Setzen wir $b = x \cdot a$, so geht die Bedingung $b/a = a/a + b$ über in $xa/a = a/(x+1)a$ bzw. in $x = 1/(x+1)$ oder $x^2 + x = 1$. Wir haben also die quadratische Gleichung $x^2 + x = 1$ zu lösen (in $\mathbb{R}$). Manche Leute können die Lösungen einer solchen Gleichung sofort hinschreiben! Wir andern müssen mit der quadratischen Ergänzung rechnen:

$$\begin{array}{rrcl} & x^2+x & = & 1 \\ & x^2+x+\frac{1}{4} & = & 1+\frac{1}{4} \\ & (x+\frac{1}{2})^2 & = & 5/4 \\ \Longrightarrow & x_{1,2} & = & -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{array}$$

Wir suchen eine positive Zahl! Mit $\tau := -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ haben wir also $b/a=\tau$ gefunden. □

Die negative Lösung $\tau' := -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ dürfen wir aber nicht vergessen, sie wird wieder auftauchen und keine unwichtige Rolle übernehmen.

6.2 Definition. Wir nennen τ die Konstante des goldenen Schnitts.

Wir erinnern jetzt an die Defnition der Fibonacci–Zahlen. Diese sind rekursiv definiert (Definition 3.5); Rekursionsanfang: $f_0 = f_1 = 1$, Rekursionsformel: $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ für $n \geq 0$.

6.2 Satz. *Es gilt für $n \geq 0$*

$$\begin{aligned} f_n/f_{n+1} > \tau \quad &\textit{für } n \textit{ gerade,} \\ f_n/f_{n+1} < \tau \quad &\textit{für } n \textit{ ungerade.} \end{aligned}$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $f_0/f_1 = 1 > \tau$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass

$$f_n/f_{n+1} \begin{cases} > \tau & \text{für } n \text{ gerade,} \\ < \tau & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann können wir rechnen:

$$\begin{aligned} f_{n+1}/f_{n+2} &= f_{n+1}/(f_n+f_{n+1}) = \\ &= 1/(1+f_n/f_{n+1}) \end{aligned}$$

Wir erinnern an die Bedingung $\tau = 1/(1+\tau)$. Sei nun $f_n/f_{n+1} > \tau$. Dann ist $1+f_n/f_{n+1} > 1+\tau$ und damit $1/(1+f_n/f_{n+1}) < 1/(1+\tau) = \tau$; d.h. $f_{n+1}/f_{n+2} < \tau$.

Ist dagegen $f_n/f_{n+1} < \tau$, so folgt $f_{n+1}/f_{n+2} > \tau$. $\square$

6.3 Satz. *Für $n \geq 0$ ist*

$$f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = \begin{cases} 1 & \textit{falls } n \textit{ gerade,} \\ -1 & \textit{falls } n \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis: Wir wenden wieder vollständige Induktion an. Induktionsanfang bei $n = 0$:

$$f_0 f_2 - f_1^2 = 2 - 1 = 1$$

(Ganz nett – wenn auch nicht nötig – ist die Rechnung $f_1 f_3 - f_2^2 = 3 - 4 = -1$).

Induktionsschritt: Die Behauptung sei richtig für $n \geq 0$. Dann gilt: $f_{n+1}f_{n+3} - f_{n+2}^2 = f_{n+1}(f_{n+1} + f_{n+2}) - f_{n+2}^2 = f_{n+1}^2 + f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+2}^2$.

Jetzt müssen wir eine Fallunterscheidung machen! Sei n gerade, dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} - 1\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 + f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+2}^2 &= f_n f_{n+2} - 1 + f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+2}^2 = \\ &= (f_n + f_{n+1})f_{n+2} - f_{n+2}^2 - 1 = f_{n+2}^2 - f_{n+2}^2 - 1 = -1\,. \end{aligned}$$

Den anderen Fall, n ungerade, handhaben wir entsprechend. $\square$

Folgerung: Für n gerade ist $f_n/f_{n+1} - f_{n+1}/f_{n+2} = 1/f_{n+1}f_{n+2}$.

Beweis: Wir dividieren die Gleichung $f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = 1$ auf beiden Seiten durch $f_{n+1}f_{n+2}$. $\square$

6.4 Satz. *Die Konstante τ des goldenen Schnitts ist durch die Fibonacci–Zahlen bestimmt.*

Beweis: Sei $A := \{f_{2n+1}/f_{2n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B := \{f_{2n}/f_{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann wissen wir nach Satz 6.2, dass gilt:

$$(*) \qquad \bigwedge_{a \in A} a < \tau \quad \text{und} \quad \bigwedge_{b \in B} \tau < b.$$

Wir wollen zeigen, dass τ die einzige reelle Zahl ist, welche die Bedingung $(*)$ erfüllt.

Seien also u, v zwei reelle Zahlen, sodass $(*)$ sowohl für u wie für v gilt, also

$$\bigwedge_{a \in A} a < u, v \quad \text{und} \quad \bigwedge_{b \in B} u, v < b\,,$$

dann ist $u = v$ zu zeigen.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) $v \geq u$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq v - u < f_{2n}/f_{2n+1} - f_{2n+1}/f_{2n+2}\,,$$

denn nach Voraussetzung ist $f_{2n}/f_{2n+1} > v$ und $f_{2n+1}/f_{2n+2} < u$. Nach Satz 6.3, Folgerung, ist die rechte Seite $f_{2n}/f_{2n+1} - f_{2n+1}/f_{2n+2} = 1/f_{2n+1}f_{2n+2}$. Da die Fibonacci–Zahlen wachsen, ist $f_n \leq f_{2n+1}$ und $1 \leq f_{2n+2}$. Wenn wir den Nenner $f_{2n+1}f_{2n+2}$ zu $f_n \cdot 1 = f_n$ verkleinern, können wir also schließen

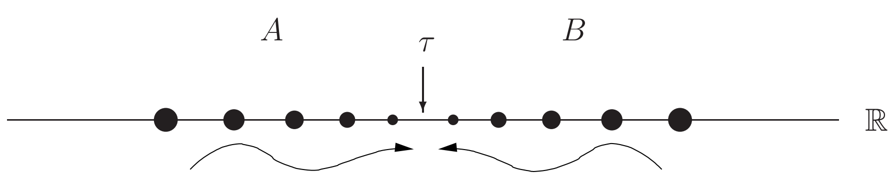
$$1/f_{2n+1}f_{2n+2} \leq 1/f_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine leichte vollständige Induktion ergibt $f_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $1/f_n \leq 1/n$ für alle $n \geq 1$. Daher bekommen wir:

$$\bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1}} 0 \leq v - u < \frac{1}{n}\,.$$

Es ist nun eine Eigenschaft der reellen Zahlen, dass diese Bedingung $v - u = 0$ und damit $v = u$ impliziert.



$\square$

Anmerkung: Wir sehen, wie nötig es ist, systematisch die Eigenschaften der reellen Zahlen zu studieren, sich insbesondere klarzumachen, wodurch welche Eigenschaften der reellen Zahlen charakterisiert sind. Dies wird traditionell in der Vorlesung „Analysis I“ unternommen. Dort wird auch genau geklärt, was es heißt, dass in unserem Beispiel hier die Zahlen f_n/f_{n+1} die Zahl τ beliebig gut approximieren, oder wie der terminus technicus sagt, gegen τ konvergieren. Wir wollen hier jedoch nicht die Definition von Konvergenz vorwegnehmen, sondern bleiben bei unserer Intuition.

6.1 Aufgabe. In wievielen Stellen hinter dem Komma stimmt die Dezimalversion von f_{12}/f_{13} mit der von τ überein?

6.2 Aufgabe. Zeigen Sie, für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $f_{2n}f_{2n+3} - f_{2n+1}f_{2n+2} = 1$ und

(ii) $f_{2n+1}f_{2n+4} - f_{2n+2}f_{2n+3} = -1$.

6.3 Aufgabe. Folgern Sie aus der Aussage von Aufgabe 6.2, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $f_{2n}/f_{2n+1} > f_{2n+2}/f_{2n+3}$ und

(ii) $f_{2n+1}/f_{2n+2} < f_{2n+3}/f_{2n+4}$.

6.4 Aufgabe. Machen Sie sich – Ihrem Kenntnisstand nach – klar, dass die Quotienten f_n/f_{n+1} die Zahl τ mit wachsendem n „immer besser approximieren“. (Das soll durch die geschwungenen Pfeile in obiger Zeichnung angedeutet werden).

6.2 Fibonacci–Folgen

So wie wir im vorigen Abschnitt heimlich Methoden von „Analysis I“ benutzt haben, werden wir in diesem und dem folgenden Methoden aus „Lineare Algebra I“ verwenden.

6.3 Definition. *Fibonacci–Folge.*
Eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ reeller Zahlen heißt „Fibonacci–Folge“, wenn für $n \geq 0$ gilt: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

6.1 Beispiel: Die Folge der Fibonacci–Zahlen $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ ist eine spezielle Fibonacci–Folge, definiert durch den Rekursionsanfang $f_0 = f_1 = 1$.

Wir stellen fest, dass jede Fibonacci–Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ schon durch das Paar (a_0, a_1), den Rekursionsanfang, bestimmt ist. Die Folge $(0, 0, 0, \ldots)$ ist eine Fibonacci–Folge und scheint im Moment die einzige zu sein, von der wir jedes Glied explizit kennen.

6.4 Definition. Seien $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ Folgen reeller Zahlen, sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann erklären wir

(1) eine Addition:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$

(2) eine Multiplikation einer Folge mit λ:

$$\lambda(a_0, a_1, a_2, \ldots) := (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots)$$

Die Addition von Folgen in (1) heißt „gliedweise Addition“; die Multiplikation mit λ die „gliedweise Multiplikation mit λ“.

Was Rechenregeln mit den eben definierten Operationen anbetrifft, finden Sie hier nun eine kleine Aufgabe:

6.5 Aufgabe. Zeigen Sie, dass die gliedweise Addition von Folgen kommutativ und assoziativ ist. Beweisen Sie ferner, dass

$$\lambda\left((a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots)\right) = \lambda(a_0, a_1, a_2, \ldots) + \lambda(b_0, b_1, b_2, \ldots)$$

gilt.

6.5 Satz. *Seien $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ Fibonacci–Folgen, sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ und $\lambda(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ Fibonacci–Folgen.*

Beweis: Die Folgen $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ und $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ erfüllen die Bedingung $a_{i+2} = a_i + a_{i+1}$, $b_{i+2} = b_i + b_{i+1}$ für $i \geq 0$. Addieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$a_{i+2} + b_{i+2} = (a_i + b_i) + (a_{i+1} + b_{i+1}),$$

also die Bedingung dafür, dass $(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ eine Fibonacci–Folge ist.

Ferner folgt aus $a_{i+2} = a_i + a_{i+1}$ die Gleichung $\lambda a_{i+2} = \lambda a_i + \lambda a_{i+1}$, d.h. $\lambda(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ ist eine Fibonacci–Folge. $\square$

In Betrachtung der Mühe, die wir uns im ersten Abschnitt gegeben haben, um die Zahlen f_n/f_{n+1} zu untersuchen, könnten wir auf die Idee kommen, für eine Fibonacci–Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ die Zahlen a_n/a_{n+1} auf „irgendeine" Besonderheit hin zu prüfen. Es gibt natürlich das Problem, dass einige der $a_n = 0$ sein können, z.B. in der Folge $(0, 0, 0, \ldots)$.

6.6 Aufgabe. Sei $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ eine Fibonacci–Folge mit $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ fest. Was schätzen Sie:
Die Zahlen a_n/a_{n+1}, $n \geq n_0$, approximieren τ mit wachsendem n immer besser, richtig oder falsch ?

Insbesondere könnten wir fragen, ob es eine Fibonacci–Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ gibt, mit $a_n/a_{n+1} = \tau$ für alle $n \geq 0$. In einer solchen Folge ist $a_0 \neq 0$. Wir könnten dann $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ mit $\lambda = 1/a_0$ multiplizieren; dann gilt ebenfalls $\lambda a_n/\lambda a_{n+1} = \tau$. O.B.d.A. könnten wir also davon ausgehen, dass es dann eine solche Folge gibt, die mit 1 anfängt:

$$(1, b_1, b_2, \ldots)\,.$$

Dann gilt: $1/b_1 = \tau$ impliziert $b_1 = 1/\tau$, $b_1/b_2 = \tau$ impliziert $b_2 = (1/\tau)^2$. Induktiv bekommen wir $b_n = (1/\tau)^n$.

Ist es nun möglich, dass $(1, 1/\tau, (1/\tau)^2, \ldots)$ eine Fibonacci–Folge ist ?

6.6 Satz. *Eine Folge $(1, q, q^2, q^3, \ldots)$ ist eine Fibonacci–Folge genau dann, wenn $q = 1/\tau$ oder $q = 1/\tau'$ ist.*

(Zur Erinnerung: Die Zahl τ' ist die andere, „bisher zu kurz gekommene" Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + x = 1$).

Beweis: Zuerst stellen wir fest, dass $(1, q, q^2, q^3, \ldots)$ eine Fibonacci–Folge ist genau dann, wenn $1 + q = q^2$ gilt. Denn wenn $(1, q, q^2, q^3, \ldots)$ eine Fibonacci–Folge ist, dann gilt $1 + q = q^2$. Wissen wir umgekehrt zunächst nur, dass $1 + q = q^2$ erfüllt ist, dann multiplizieren wir $1 + q = q^2$ auf beiden Seiten mit q^n und erhalten

$$q^{n+2} = q^n + q^{n+1}\,.$$

Damit ist $(1, q, q^2, \ldots)$ eine Fibonacci–Folge.

Als nächstes haben wir also die quadratische Gleichung $1 + q = q^2$ zu lösen. Da wir die Lösungen von $x^2 + x = 1$ schon kennen, nämlich τ und τ', können wir wie folgt vorgehen: Aus $\tau^2 + \tau = 1$ erhalten wir, indem wir beide Seiten durch τ^2 dividieren, die Gleichung

$$1 + \left(\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 ,$$

d.h. $1/\tau$ ist eine Lösung von $1 + q = q^2$. Entsprechend ist $1/\tau'$ die zweite Lösung von $1 + q = q^2$. □

Setzen wir $\sigma := 1/\tau$, $\sigma' := 1/\tau'$, so halten wir fest, dass wir zwei besondere Fibonacci–Folgen

$$(1, \sigma, \sigma^2, \ldots) \quad \text{und} \quad (1, \sigma', (\sigma')^2, \ldots)$$

bekommen haben.

Wir konstatieren, dass für die Quotienten a_n/a_{n+1} der zweiten Folge gilt, $a_n/a_{n+1} = \tau'$ für $n \geq 0$. D.h. die richtige Antwort in Aufgabe 6.6 ist „falsch“.

Unbedingt festhalten sollten wir auch das Ergebnis der folgenden Aufgabe:

6.7 Aufgabe. Zeigen Sie $\sigma = \frac{1}{\tau} = -\tau'$ und $\sigma' = 1/\tau' = -\tau$ und ferner $1 + \tau = -\tau'$ und $1 + \tau' = -\tau$.

6.3 Eine explizite Formel

Die Idee im folgenden besteht darin, reelle Zahlen α, β zu suchen, sodass $(1, 1, 2, \ldots) = \alpha(1, \sigma, \sigma^2, \ldots) + \beta(1, \sigma', (\sigma')^2, \ldots)$ gilt. Dann haben wir eine explizite Formel für f_n, nämlich

$$f_n = \alpha\sigma^n + \beta(\sigma')^n = (-1)^n\alpha(\tau')^n + (-1)^n\beta\tau^n .$$

6.7 Satz. *Sei* $\alpha := -\frac{1}{5}\sqrt{5}\tau'$ *und* $\beta := \frac{1}{5}\sqrt{5}\tau$. *Dann gilt* $\alpha(1, \sigma, \sigma^2, \ldots) + \beta(1, \sigma', (\sigma')^2, \ldots) = (1, 1, 2, 3, \ldots)$ *und daraus folgt* $f_n = (-1)^n\frac{1}{5}\sqrt{5}(\tau^{n+1} - (\tau')^{n+1})$.

Beweis: Wir haben zu zeigen, dass $(\alpha, \alpha\sigma, \alpha\sigma^2, \ldots) + (\beta, \beta\sigma', \beta(\sigma')^2, \ldots) = (1, 1, 2, \ldots)$ ist. Da wir mit Fibonacci–Folgen rechnen, die durch die ersten beiden Glieder bestimmt sind, brauchen wir nur nachzurechnen, dass

$$(*) \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha\sigma + \beta\sigma' &= 1 \end{aligned}$$

gilt.

Es ist $\alpha+\beta = -\frac{1}{5}\sqrt{5}\tau' + \frac{1}{5}\sqrt{5}\tau = \frac{1}{5}\sqrt{5}(\tau - \tau') = \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\right) = 5/5 = 1$.

Wegen $\sigma = -\tau'$ und $\sigma' = -\tau$ ergibt die zweite Gleichung $-\frac{1}{5}\sqrt{5}\tau'(-\tau') + \frac{1}{5}\sqrt{5}\tau(-\tau) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\left((\tau')^2 - (\tau)^2\right) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\,(\tau' - \tau)(\tau' + \tau) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\,(\sqrt{5})(-1) = 1$.

Die Berechnung von f_n stellen wir als Übungsaufgabe. $\square$

6.8 Aufgabe. Zeigen Sie

$$f_n = (-1)^n \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\tau^{n+1} - (\tau')^{n+1}\right)$$

Die Zahlen α, β habe ich gefunden, in dem ich das lineare Gleichungssystem $(*)$ für α, β gelöst habe. Deswegen zur Übung:

6.9 Aufgabe. Lösen Sie das Gleichungssystem zu α, β:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha\sigma + \beta\sigma' &= 1\,. \end{aligned} \right.$$

Als nächstes wollen wir für jede Fibonacci–Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ eine explizite Formel für a_n finden.

Betrachten wir speziell folgende Folgen:

$$\begin{aligned} (b_0, b_1, b_2, \ldots) &:= (1, 0, 1, 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \\ (c_0, c_1, c_2, \ldots) &:= (0, 1, 1, 2, \ldots)\,. \end{aligned}$$

Dann beobachten wir:

$$\left. \begin{aligned} b_n &= f_{n-2} \\ c_n &= f_{n-1} \end{aligned} \right\} \text{ für } n \geq 2\,.$$

6.8 Satz. *Ist* $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *eine Fibonacci–Folge, so ist* $a_n = a_0 f_{n-2} + a_1 f_{n-1}$ *für* $n \geq 2$.

Beweis: Wir brauchen nur nachzuprüfen, dass $(a_0, a_1, \ldots) = a_0(b_0, b_1, \ldots) + a_1(c_0, c_1, \ldots)$ ist. Das ist leicht! □

6.10 Aufgabe. Berechnen Sie a_{20} in der Fibonacci–Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots) := (-9, 7, -2, \ldots)$.

Mögen Sie noch mehr zu Aufgabe 6.6?

6.11 Aufgabe. Sei $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ eine Fibonacci–Folge verschieden von $(0, 0, 0, \ldots)$. Dann gibt es höchstens ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 0$.

Sei nun $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ eine Fibonacci–Folge verschieden von 0. Wenn nur n „groß genug" ist, dann ist a_n/a_{n+1} definiert. Wir „kennen" a_n nach Satz 6.8.

$$a_n = a_0 f_{n-2} + a_1 f_{n-1} \qquad n \text{ „groß"}.$$

Dann gilt

$$a_n/a_{n+1} = (a_0 f_{n-2} + a_1 f_{n-1})/a_0 f_{n-1} + a_1 f_n)\,.$$

Wir dividieren Zähler und Nenner durch f_{n-1}; dann ist

$$a_n/a_{n+1} = \left(a_0 \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} + a_1\right) \Big/ \left(a_0 + a_1 \frac{f_n}{f_{n-1}}\right)$$

Nun gilt, dass die Folge der Zahlen f_n/f_{n+1} gegen τ konvergiert. Es liegt nahe anzunehmen, dass dann die Folge der Zahlen $a_0 \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} + a_1$ gegen $a_0\tau + a_1$ konvergiert – und tatsächlich besagen das die Rechenregeln für konvergente Folgen aus Analysis. Die Folge der Zahlen $a_0 + a_1 \frac{f_n}{f_{n-1}}$ konvergiert dann gegen $a_0 + a_1/\tau$. Falls $a_0 + a_1/\tau \neq 0$ ist, konvergiert dann a_n/a_{n+1} gegen $(a_0\tau + a_1)/(a_0 + a_1/\tau) = \tau$.

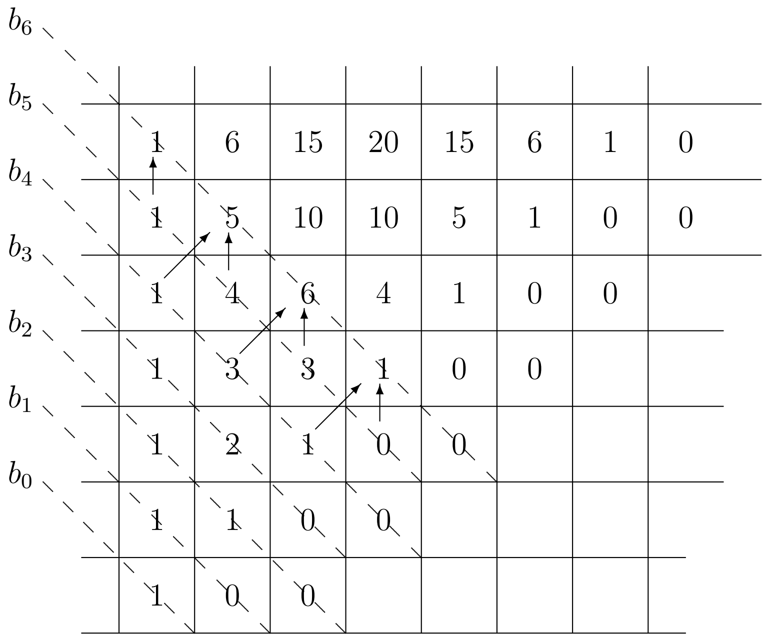
Was bedeutet nun $a_0 + a_1/\tau = 0$? Es folgt, $a_1 = (-\tau)a_0 = \sigma' a_0$. Also schließen wir

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = a_0(1, \sigma', (\sigma')^2, \ldots)\,.$$

Damit können wir erst einmal zufrieden sein!

6.4 Fibonacci–Zahlen und Binomialkoeffizienten

Wir sehen uns das Spielbrett mit den Binomialkoeffizienten von Beispiel 3.9 mit einer neuen Absicht an:



6.5 Definition. Sei b_n die Summe der Binomialkoeffizienten in der i-ten schräg gestrichelten Linie, d.h. $b_n = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n-\ell}{\ell}$ für $n \geq 0$. (Zur Erinnerung: Es ist $\binom{k}{\ell} = 0$ für $k < \ell$).

6.9 Satz. *Es ist $b_n = f_n$.*

Beweis: Wir stellen fest, dass $b_0 = f_0$, $b_1 = f_1$ ist; also brauchen wir nur die Rekursionsformel $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$ zu beweisen. Diese erkennen wir durch Inspektion des Spielbretts. Z.B. erkennt man in der Zeichnung, dass $b_6 = b_4 + b_5$ gilt.

Wir können auch folgenden formalen Beweis führen: Es ist $b_{n+2} = \sum\limits_{\ell=0}^{*} \binom{n+2-\ell}{\ell}$ (Wir legen uns in der Notation nicht auf eine obere Summationsgrenze fest, weil es darauf nicht ankommt, solange sie nur passend groß gewählt ist). Für

$b_n + b_{n+1}$ erhalten wir

$$\sum_{\ell=0}^{*} \binom{n-\ell}{\ell} + \sum_{q=0}^{*} \binom{n+1-q}{q}$$

Mit $\ell = q-1$ ergibt dies

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{*} \tbinom{n+1-q}{q-1} + \sum_{q=0}^{*} \tbinom{n+1-q}{q} = \\ = \quad & \tbinom{n+1}{0} + \sum_{q=1}^{*} \left(\tbinom{n+1-q}{q-1} + \tbinom{n+1-q}{q} \right) \end{aligned}$$

Jetzt wird die Rekursionsformel für die Binomialkoefizenten angewendet:

$$\begin{aligned} &= \tbinom{n+1}{0} + \sum_{q=1}^{*} \tbinom{n+2-q}{q} \\ &= \sum_{q=0}^{*} \tbinom{n+2-q}{q} \\ &= b_{n+2} \,. \end{aligned}$$

□

6.5 Andere Rekursionsformeln

Statt der Rekursionsformel $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ bei den Fibonacci–Sequenzen könnten wir in leichter Verallgemeinerung Folgen $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ betrachten, welche der Rekursionsformel

(R) $\qquad a_{n+2} = \alpha\, a_n + \beta\, a_{n+1}\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest

genügen. Es ist dann eine natürliche Frage, ob wir ähnlich wie bei den Fibonacci–Zahlen eine explizite Formel für a_n finden können.

6.6 Definition. Eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ reeller Zahlen heiße R–Folge, wenn für $n \geq 0$ die Bedingung (R) erfüllt ist.

Wir suchen dann zuerst R–Folgen der Art $(1, \sigma, \sigma^2, \ldots)$.

6.12 Aufgabe. Zeigen Sie, dass $(1, \sigma, \sigma^2, \ldots)$ genau dann eine R–Folge ist, wenn σ eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = \alpha + \beta x$ ist.

Es ist nun angebracht, sich ein wenig Gedanken über die Lösung der Gleichung $x^2 = \alpha + \beta x$ zu machen. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} x^2 - \beta x + \left(\tfrac{\beta}{2}\right)^2 &= \alpha + \left(\tfrac{\beta}{2}\right)^2 \\ \left(x - \tfrac{\beta}{2}\right)^2 &= \alpha + \left(\tfrac{\beta}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Die rechte Seite $\alpha + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 =: D$, die Diskriminante, entscheidet über die Art der Lösungen:

(a) $D > 0$, dann gibt es zwei reelle Lösungen

$$\sigma_1 := \frac{\beta}{2} + \sqrt{D}\,, \quad \sigma_2 := \frac{\beta}{2} - \sqrt{D}$$

(b) $D = 0$, dann gibt es eine Lösung $\sigma := \frac{\beta}{2}$,

(c) $D < 0$, dann gibt es zwei (komplex konjugierte) Lösungen $\sigma_1 := \frac{\beta}{2} + i\sqrt{(-D)}$, $\sigma_2 := \frac{\beta}{2} - i\sqrt{(-D)}$.

In diesem Falle muß man i.f. mit komplexen Zahlen rechnen (siehe dazu Anhang A).

6.13 Aufgabe. Beweisen Sie folgenden Satz:

6.10 Satz. *Sei $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ eine R–Folge.*
(i) Die quadratische Gleichung $x^2 = \alpha + \beta x$ habe zwei Lösungen σ_1, σ_2. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen (ev. komplex) u, v, sodass

$$a_n = u\sigma_1^n + v\sigma_2^n$$

gilt.
(ii) Hat $x^2 = \alpha + \beta x$ nur eine Lösung σ, so gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen u, v mit

$$a_n = u\sigma^n + vn\sigma^n\,.$$

6.14 Aufgabe. Berechnen Sie a_n wenn $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ eine Folge mit $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$ für $n \geq 0$ ist. Geben Sie a_{100} an!

6.15 Aufgabe. Konstruieren Sie eine Rekursionsformel $a_{n+2} = \alpha a_n + \beta a_{n+1}$, sodass Fall (ii) von Satz 6.10 eintritt.

6.16 Aufgabe. Sei $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ die Folge mit $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+2} = -a_n + a_{n+1}$. Berechnen Sie a_{6000}. (Vorsicht: Das Ergebnis ist leicht ohne die ganze Theorie zu finden).

6.17 Aufgabe. Riskieren Sie – in Analogie zu den Fibonacci–Zahlen – eine Aussage über die Folge der Zahlen a_n/a_{n+1} in einer R-Folge.

6.7 Definition. Eine R-Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ nennen wir „periodisch" mit der Periode m, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+m} = a_n \, .$$

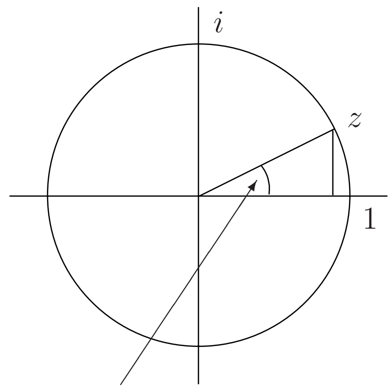
6.2 Beispiel: Die Folge in Aufgabe 6.17 hat Periode 6.

6.18 Aufgabe. Zeigen Sie, dass jede R–Folge zur Rekursionsformel $a_{n+2} = -a_n + a_{n+1}$ die Periode 6 hat. (Spätestens jetzt sollten Sie Aufgabe 6.17 doch nach dem allgemeinen Verfahren von Satz 6.10 lösen; dann erkennen Sie die Periodizität schon an den Lösungen der quadratischen Gleichung).

6.19 Aufgabe. Geben Sie eine Rekursionsformel (R), $a_{n+2} = \alpha a_n + \beta a_{n+1}$, an, sodass alle R-Folgen die Periode 12 haben.

Hinweis: Berechnen Sie (Anhang A) die komplexe Zahl z und ihre Konjugierte

$\bar{z}$, wie die folgende Zeichnung angibt; insbesondere ist $z^{12} = \bar{z}^{12} = 1$.



$\sphericalangle\ 2\pi/12$ (oder 30^o)

Dann bilden Sie $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}$ und setzen $\alpha := -z\bar{z}$, $\beta := (z + \bar{z})$. Dann hat $x^2 = \alpha + \beta x$ gerade die Lösungen $z, \bar{z}$.

6.20 Aufgabe. Sei $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ die Folge $(2, 6, 20, a_3, a_4, a_5, \ldots)$ mit $a_{n+3} = 6a_n - 11a_{n+1} + 6a_{n+2}$ für $n \geq 0$. Finden Sie eine explizite Formel für a_n.

6.6 Mini–Literaturliste

1. N.N. Worobjow: Die Fibonaccischen Zahlen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971.

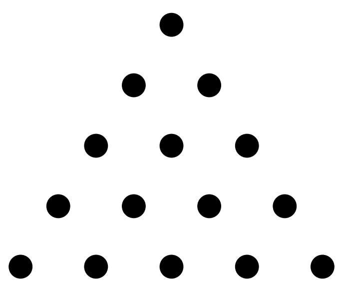
2. Es gibt eine Zeitschrift „The Fibonacci Quarterly“, die nur etwas veröffentlicht, wenn es mit den Fibonacci–Zahlen zu tun hat. Sie wurde aus Spargründen leider an der Bibliothek des Fachbereichs abbestellt.

7 Nim und ähnliche Spiele

In diesem Kapitel wollen wir ein wenig spielen, doch unsere wesentliche Aufgabe wird es sein, das was wir spielen zu analysieren. Deswegen können wir uns nur einfache „Spielchen“ vornehmen; hauptsächlich werden wir uns um das klassische Nim und seine Varianten kümmern.

7.1 Definition. *Nim.*
Gegeben seien r Stapel von Spielsteinen. Die Anzahl der Spielsteine im i-ten Stapel sei $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, r$. Ein Zug besteht darin, aus genau einem der Stapel mindestens einen Spielstein wegzunehmen.
(Alle Steine in einem Stapel wegzunehmen, ist erlaubt, falls es sich um wenigstens einen handelt). Es wird abwechselnd gezogen; wer den letzten Stein nimmt, hat gewonnen.
Wir benennen das Spiel mit $\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)$.
In der Variante Misère-Nim hat derjenige gewonnen, der zuerst nicht mehr ziehen kann; d.h. wer den letzten Stein nimmt, hat verloren.

7.1 Aufgabe. Spielen Sie $\mathrm{Nim}(1, 2, 3, 4, 5)$ und seine Misère-Version!



Anmerkung: In dem Film „Letztes Jahr in Marienbad“ wird mit Streichhölzchen gespielt. Es geht darum, wer Glück in der Liebe und wer Glück im Spiel hat.

Möchten Sie spielen? Version 1[1] Version 2

[1] Programmiert von Benjamin Kettner.

7.2 Definition. Sei $0 < s$ eine natürliche Zahl, dann sei $\mathrm{Nim}_s(n_1, \ldots, n_r)$ das Spiel mit der abgewandelten Regel, dass bei einem Zug mindestens ein Stein aber höchstens s Steine aus genau einem Stapel weggenommen werden dürfen.

7.2 Aufgabe. Spielen Sie $\mathrm{Nim}_2(1, 2, 3, 4, 5)$.

7.3 Definition. Mit W-$\mathrm{Nim}(n_1, n_2)$ sei das Spiel bezeichnet, wo zusätzlich zu den Zügen von Nim es noch erlaubt ist, aus beiden Stapeln die gleiche Anzahl (größer als 0) von Steinen wegzunehmen. (Der Buchstabe „W“ erinnert an den Erfinder Wythoff des Spiels).

Wir unterteilen das Kapitel nun wie folgt:

7.1 Darstellung natürlicher Zahlen in q-adischer Form

7.2 Analyse des klassischen Nim

7.3 Ein rekursives Verfahren der Analyse

7.4 Die Summe von Spielen und die „ultimative Analyse“

7.1 Darstellung natürlicher Zahlen in q-adischer Form

Wir fangen mit einer harmlos aussehenden Überlegung an:

7.1 Lemma. *Sei $q \in \mathbb{N}$ und $q \geq 1$. Dann läßt sich jede natürliche Zahl n genau auf eine Weise in der Form $n = kq + r$ schreiben mit k, $r \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < q$.*

Beweis: Wir führen eine Induktion über n durch.

Für $n = 0$ müssen wir $k = r = 0$ setzen.

Induktionsschritt: Sei $n = kq+r$ mit $0 \leq r < q$. Dann ist $(n+1) = kq+r+1$. Wenn $r + 1 < q$ gilt, haben wir $n + 1$ in der verlangten Weise geschrieben. Ist $r + 1 = q$, so haben wir mit $n + 1 = kq + q = (k + 1)q + 0$ wieder die geforderte Schreibweise.

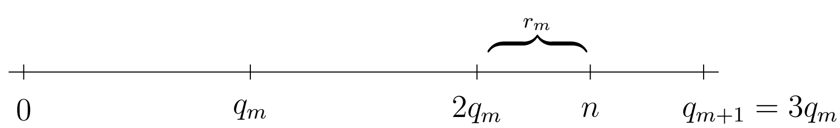
Es bleibt, noch die Eindeutigkeit der Darstellung von $n+1$ zu überlegen. Sei $n+1 = jq+s$ mit $0 \leq s < q$. Wenn $s > 0$ ist, so haben wir $n = jq+(s-1)$. Dann sind aber j und $s-1$ nach Induktionsvoraussetzung eindeutig bestimmt und damit j und s. Ist $s = 0$, so ist $n = (j-1)q+(q-1)$, und wir argumentieren entsprechend. □

7.1 Satz. *Seien $q_0, q_1, q_2, \ldots$ natürliche Zahlen mit $q_0 = 1$, $q_{i+1} = a_i q_i$ für $a_i > 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Dann läßt sich jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig darstellen als*

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i q_i$$

mit $0 \leq \varepsilon_i < a_i$ und höchstens endlich vielen $\varepsilon_i \neq 0$. (Wir lassen den Summationsindex aus Bequemlichkeit von 0 bis ∞ laufen, damit wir nicht eine obere Summationsgrenze hinschreiben müssen; unendlich viele Nullen aufaddiert soll – nach Vereinbarung – gleich Null sein).

Bevor wir einen formalen Beweis führen, sei anschaulich angedeutet, was hier vorgeht: Wir betrachten die q_i als Maßstäbe, mit denen wir n ausmessen. Wir suchen zuerst den Maßstab q_m mit $q_m \leq n$ und $q_{m+1} > n$.



Dann legen wir q_m genau ε_m-mal an, sodass $\varepsilon_m q_m + r_m = n$ mit $0 \leq r_m < q_m$ gilt; dann ist $0 < \varepsilon_m < a_m$. Um den Rest r_m kümmern wir uns dann mit den Maßstäben q_i für $i < m$. (In der Zeichnung ist $a_m = 3$).

Beweis des Satzes: Wir machen aus der Ausmessungsidee nun einen Induktionsbeweis für eine noch präzisere Aussage:

$$A(m) \left\{ \begin{array}{l} \text{Für } n < q_m \text{ läßt sich } n \text{ in eindeutiger Weise darstellen als} \\[1em] \qquad\qquad n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i q_i\,,\ 0 \leq \varepsilon_i < a_i\,. \\[1em] \text{In dieser Darstellung ist } \varepsilon_i = 0 \text{ für } i \geq m\,. \end{array} \right.$$

Beweis: Für $m = 0$ liegt nur der Fall $n = 0$ vor. Alle ε_i sind dann gleich 0 zu setzen.

Induktionsschritt: Sei $n < q_{m+1}$. Dann bestimmen wir ε_m durch das Ausmessungsverfahren: Nach Lemma 7.1 ist $n = \varepsilon_m q_m + r_m$ mit $0 \leq r_m < q_m$. Für die Zahl ε_m erhalten wir $0 \leq \varepsilon_m < a_m$ ($\varepsilon_m = 0$ ist natürlich möglich), weil $n < a_m q_m = q_{m+1}$ vorausgesetzt ist. Auf $r_m < q_m$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, $r_m = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k q_k$; also ist $n = \varepsilon_m q_m + \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k q_k$. Damit haben wir die Existenz der Darstellung bewiesen.

Die Eindeutigkeit sehen wir so ein: Sei $n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i q_i$; sei k der größte Index mit $\varepsilon_k \neq 0$. D.h. also $n = \varepsilon_k q_k + \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i q_i$. Dann ist q_k gerade der größte Maßstab mit der Eigenschaft $n = \varepsilon_k q_k + r_k$, $0 < \varepsilon_k < a_k$ und $r_k < q_k$; dazu müssen wir nur noch verifizieren, dass

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i q_i < q_k$$

gilt. Dann ist aber ε_k und sind nach Induktionsvoraussetzung die anderen ε_i eindeutig durch n bestimmt.

Verifikation von $(*)$: Wir beweisen durch Induktion über r, dass

$$\sum_{i=0}^{r} \varepsilon_i q_i < q_{r+1}$$

gilt, falls die Bedingung $0 \leq \varepsilon_i < a_i$ erfüllt ist.

Induktionsanfang: $r = 0$, $\varepsilon_0 q_0 < q_1$ ist richtig.

Induktionsschritt: $\sum_{i=0}^{r+1} \varepsilon_i q_i = \left(\sum_{i=0}^{r} \varepsilon_i q_i\right) + \varepsilon_{r+1} q_{r+1} < q_{r+1} + \varepsilon_{r+1} q_{r+1} =$
$= (1 + \varepsilon_{r+1}) q_{r+1} \leq a_{r+1} q_{r+1} = q_{r+2}$. □

Wenn wir die natürlichen Zahlen nach Satz 7.1 darstellen, können wir auch mit diesem neuen System addieren und subtrahieren.

7.3 Aufgabe. Beim digitalen Videoschnitt sind 25 Bilder eine Sekunde, 60 Sekunden eine Minute. Die Angabe 7.26.13 besagt also, dass die Länge 7 Minuten, 26 Sekunden und 13 Bilder beträgt.

Wieviel länger ist das Video 7.26.13 als das Video 4.49.16 ?

7.4 Definition. *q-adische Darstellung.*
Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Wir setzen $q_i := q^i$. Dann haben wir einen Spezialfall des Satzes 7.1 ($a_i = q$ für alle i). Es gibt also für jede natürliche Zahl n eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i q^i$$

mit $0 \leq \varepsilon_i < q$.

7.1 Beispiel: Im Falle $q = 2$ sprechen wir auch von „dyadischer" (oder „binärer") Darstellung.

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i 2^i$$

mit $0 \leq \varepsilon_i \leq 1$ eine Summe endlich vieler verschiedener Zweier-Potenzen. Statt dieser Summe schreiben wir auch kürzer das Wort

$$\varepsilon_m \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0$$

in den Buchstaben $0, 1$ hin, wobei m der größte Index mit $\varepsilon_m \neq 0$ ist.

Aus 0 wird also das Wort 0, aus 1 das Wort 1 und für die weiteren Zahlen gilt,

$$\begin{array}{rcr} 2 & \longleftrightarrow & 10 \\ 3 & \longleftrightarrow & 11 \\ 4 & \longleftrightarrow & 100 \\ 5 & \longleftrightarrow & 101 \end{array}$$

usw.

7.4 Aufgabe. Schreiben Sie $3, 7, 15$ in dyadischer (binärer) Form, addieren Sie die drei Zahlen im 2-adischen System und machen Sie die Probe.

Wenn Sie Aufgabe 7.4 redlich gemacht haben, werden Sie zustimmen, dass bei Addition im dyadischen System die sogenannten „Überträge" einem zu schaffen machen können. Allein schon deswegen könnten wir auf die Idee kommen, ohne Überträge zu addieren, wie wir es im nächsten Abschnitt tun werden.

7.5 Aufgabe. Berechnen Sie $\sum_{i=0}^{k} 2^i$ nach der Formel der geometrischen Summe von Aufgabe 3.3.

7.2 Analyse des klassischen Nim

In diesem Abschnitt lassen wir einen „Deus ex Machina“ auftreten; in 7.3 erst werden wir ihn „säkularisieren“.

7.5 Definition. Auf $\mathbb{N}$ definieren wir eine neue Verknüpfung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,,\ (n, m) \longmapsto n \oplus m\,,$$

wobei wir $n \oplus m$ durch Addition von n, m im dyadischen System ohne Berücksichtigung der Überträge erhalten. D.h. genauer: Wenn $\varepsilon_i(k)$ die Ziffer 0 oder 1 aus der dyadischen Darstellung $k = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i(k) 2^i$ ist, dann ist

$$\varepsilon_i(n \oplus m) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \varepsilon_i(n) = \varepsilon_i(m)\,, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

7.2 Beispiel: $7 \oplus 3 = 4$

7.6 Aufgabe. Ergänzen Sie folgende „Additionstafel“ für $n \oplus m$:

7	7							
6	6							
5	5							
4	4	5	6	7	0	1	**?**	
3	3	2	1	0	7	6	5	
2	2	3	0	1	6	7	4	
1	1	0	3	2	5	4	7	
0	0	1	2	3	4	5	6	7
$n \diagup k$	0	1	2	3	4	5	6	7

7.7 Aufgabe. Prüfen Sie exemplarisch in der Tafel nach, dass $n \oplus m$ die kleinste Zahl aus $\mathbb{N} \smallsetminus \{\widetilde{n} \oplus m,\, n \oplus \widetilde{m} \mid \widetilde{n} < n,\, \widetilde{m} < m\}$ ist. (Z.B. $6 \oplus 4 = 2$).

7.2 Satz. *Die Nim-Addition genügt folgenden Rechenregeln:*

(a) Assoziativgesetz, d.h.

$$\bigwedge_{a,b,c\in\mathbb{N}} a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c\,;$$

(b)
$$\bigwedge_{a\in\mathbb{N}} a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$$

d.h. 0 *ist ein sogenanntes „neutrales Element“ für* $\oplus$*;*

(c)
$$\bigwedge_{a\in\mathbb{N}} \bigvee_{b\in\mathbb{N}} a \oplus b = b \oplus a = 0$$

(Es ist nämlich $a \oplus a = 0$ *für alle* $a \in \mathbb{N}$*).*

(d) Kommutativgesetz, d.h.

$$\bigwedge_{a,b\in\mathbb{N}} a \oplus b = b \oplus a\,.$$

Beweis: Die Eigenschaften (b), (c), (d) sind klar nach Definition. Um das Assoziativgesetz zu zeigen, müssen wir nur schauen was an der i-ten Stelle in der dyadischen Darstellung geschieht: Man hat Nullen und Einsen nach den durch die Tabelle

1	1	0
0	0	1
	0	1

gegebenen Rechenregeln (Nim-Addition) zu addieren. D.h. wir haben zu testen, dass die Verknüpfung $\{0,1\} \times \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$, $(a,b) \longmapsto a \oplus b$, assoziativ ist. Das können wir durch Hinschreiben aller Möglichkeiten verifizieren, z.B.

$$\begin{aligned} 0 \oplus (0 \oplus 0) &= (0 \oplus 0) \oplus 0 \\ 0 \oplus (0 \oplus 1) &= (0 \oplus 0) \oplus 1 \\ 0 \oplus (1 \oplus 0) &= (0 \oplus 1) \oplus 0 \\ 0 \oplus (1 \oplus 1) &= (0 \oplus 1) \oplus 1 \\ \ldots & \\ \ldots & \end{aligned}$$

usw., wieviele Tests insgesamt? □

Wenn wir uns vorstellen, $\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)$ zu spielen, so durchlaufen wir beim Spielen verschiedene Zustände, sagen wir „Positionen" des Spiels, die wiederum durch ein r-Tupel natürlicher Zahlen $(n'_1, \ldots, n'_r)$ mit $n'_i \leq n_i$ beschrieben sind. D.h. jede Position $(n'_1, \ldots, n'_r)$ können wir als ein Nim-Spiel $\mathrm{Nim}(n'_1, \ldots, n'_r)$ ansehen. (Denn wir könnten ja mit dieser Position anfangen zu spielen). So wollen wir das im folgenden sehen: Jede Position eines Spiels ist ein „neues" Spiel.

7.6 Definition. *Wert* $G(\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r))$.
Für jedes Nim-Spiel $\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)$ definieren wir einen Wert $G(\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)) \in \mathbb{N}$ als $n_1 \oplus \ldots \oplus n_r$. (Wegen der Assoziativität von „$\oplus$" setzen wir keine Klammern in der Formel $n_1 \oplus \ldots \oplus n_r$).

7.8 Aufgabe. Berechnen Sie $G(\mathrm{Nim}(1, 2, 3, 4, 5))$.

7.3 Satz. *(1) Ist $G(\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)) \neq 0$, so gibt es einen Zug von $\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)$ nach einer Position $P = \mathrm{Nim}(n'_1, \ldots, n'_r)$ mit $G(P) = 0$.*
(2) Ist $G(\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)) = 0$, so führt jeder erlaubte Zug von $\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)$ aus zu einer Position Q mit $G(Q) \neq 0$.

Fazit: Jetzt weiß man, wie man Nim spielen kann. Betrachten wir $\mathrm{Nim}(1, 2, \ldots, 5)$ beispielsweise. Seinen Wert haben wir in Aufgabe 7.8 als 1 bestimmt. Spiele ich als erster, dann ziehe ich zu einer Position mit Wert 0 (das geht nach dem Satz 7.3(1)). Mein Partner hat dann entweder schon verloren oder er hat nur die Chance, zu einer Position mit Wert $\neq 0$ zu ziehen. So geht es weiter und ich bin also derjenige, der zuerst die Endposition $\mathrm{Nim}(0, \ldots, 0)$ (mit Wert 0) erreicht.

Misère-Nim ist damit noch nicht geklärt; die allgemeine Philosophie ist es, ein Spiel in Misère-Version zu spielen wie das Spiel selbst und nur „gegen Ende“ aufzupassen.

7.9 Aufgabe. Finden Sie heraus, wie Sie $\mathrm{Nim}(1, 2, \ldots, 5)$ in Misère-Version spielen können.

Beweis des Satzes: (1) Es sei $m := n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_r \neq 0$. In dyadischer Schreibweise sei m geschrieben als

$$\ldots 001\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-2} \ldots \varepsilon_1\varepsilon_0$$

mit $\varepsilon_i = \varepsilon_i(m)$ und eben $\varepsilon_k(m) = 1$, d.h. 2^k ist die höchste Potenz von 2 mit $2^k \leq m$ (dies nur zur Wiederholung). Dann gibt es eine unter den Zahlen $n_1, \ldots, n_r$, sagen wir n_i, für die $\varepsilon_k(n_i)$ ebenfalls gleich 1 ist, und es gilt

$$m \oplus n_i < n_i\,.$$

Warum ist das so? Am besten sieht man das wieder an den binären Darstellungen ein:

$$\begin{array}{r|cccccccc}
m: & & 1 & \varepsilon_{k-1} & \varepsilon_{k-2} & \ldots & \varepsilon_i & \varepsilon_0 \\
n_i & \boxed{} & 1 & \eta_{k-1} & \eta_{k-2} & \ldots & \eta_1 & \eta_0 \\
\hline
m \oplus n_i & \boxed{} & 0 & ? & & \ldots & & ? \\
k & \boxed{} & 0 & 1 & 1 & \ldots & & 1
\end{array}$$

Kasten bleibt erhalten

Es ist $m \oplus n_i \leq k$, wobei k aus der Zahl $m \oplus n_i$ entsteht, indem wir statt $\varepsilon_i \oplus \eta_i$ eine 1 schreiben für $i = 0, \ldots, k-1$. Nun ist $k < n_i$, weil nach Aufgabe 7.6 $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$ ist, also ist $m \oplus n_i < n_i$.

Es ist also ein erlaubter Zug, den Stapel n_i auf $n_i' := m \oplus n_i$ zu vermindern. Und es ist $G(Nim(n_1, \ldots, n_i', \ldots, n_r)) = n_1 \oplus \ldots \oplus n_i' \oplus \ldots \oplus n_r = n_1 \oplus \ldots \oplus (m \oplus n_i) \oplus \ldots \oplus n_r = m \oplus m = 0$ (Rechenregeln von Satz 7.2).

(2) Sei nun $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_r = 0$, ohne dass $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$ ist. Dann ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Einsen unter den Zahlen $\varepsilon_i(n_1), \varepsilon_i(n_2), \ldots, \varepsilon_i(n_r)$ gerade. Verkleinern wir eine der Zahlen $n_1, \ldots, n_r$, zum Beispiel n_i zu n_i', dann gilt dies nicht mehr für $n_1, \ldots, n_i', \ldots, n_r$ und damit ist $n_1 \oplus \ldots \oplus n_i' \oplus \ldots \oplus n_r \neq 0$. □

7.3 Ein rekursives Verfahren der Analyse

In diesem und dem nächsten Abschnitt werden wir eine gewisse „Sorte“ von Spielen untersuchen, zu denen auf jeden Fall „Nim“ und seine Varianten gehören.

7.7 Definition. Ein Spiel heiße „Nim-ähnlich“, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Es wird von zwei Personen gespielt, die abwechselnd ziehen. Sie kommen zu Beginn überein, wer anfängt (erster und zweiter Spieler), und sie wählen eine Anfangsposition;

(ii) es gibt nur endlich viele Positionen. Die Menge der Positionen werde mit S bezeichnet.

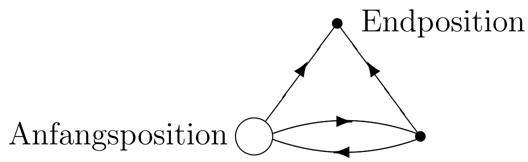
(iii) Ein Zug besteht darin, von der gegebenen Position P in eine andere P' „vorzurücken“; d.h. für jede Position P ist eine Teilmenge $Z(P)$ von $S \setminus P$ gegeben, welche die von P aus möglichen Züge angibt. Diese Menge hängt insbesondere nicht vom Spieler ab, der gerade dran ist, und auch nicht vom bisherigen Spielverlauf. Es gibt Endpositionen E mit $Z(E) = \varnothing$.

(iv) Die Spielregeln, also die Angabe aller $Z(P)$ sind derart, dass jede Durchführung des Spiels nach endlich vielen Zügen in einer Endposition ankommt. Gewonnen hat dann, wer den letzten Zug gemacht hat.

Man kann sich ein solches Spiel wie folgt visualisieren: Für jede Position P wähle man einen Punkt in der Ebene. Die Möglichkeit eines Zugs von P nach P' wird durch eine mit einem Richtungspfeil versehene Strecke von P nach P' symbolisiert. Ein Spielverlauf entspricht dann dem Ziehen eines Spielsteins von der Anfangsposition aus, immer eine Strecke in der richtigen Richtung, bis zu einem Endpunkt.

7.8 Definition. Das so entstandene Gebilde von Punkten und Strecken („Strecke“ ist dabei nicht zu wörtlich zu verstehen; vielleicht muß man auch mal biegen) nennen wir den Graphen des Spiels (nicht zu verwechseln mit dem Graphen einer Funktion).

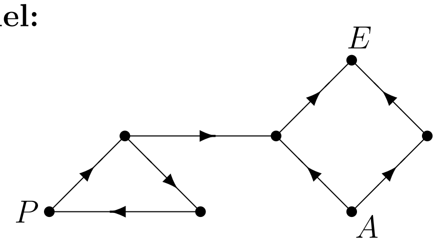
7.3 Beispiel: Das folgende Spiel erfüllt nicht die Bedingungen:



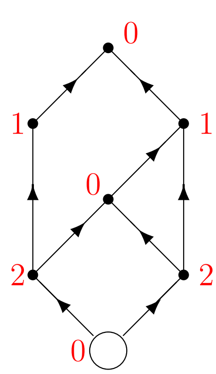
Denn der weiße Spielstein könnte auf der Waagerechten immer hin und her geschoben werden.

Auch das folgende Spiel erfüllt nicht die Bedingungen. Denn ein Beginn in der Position P erlaubt ein endloses Herumziehen des Spielsteins um das Dreieck.

7.4 Beispiel:



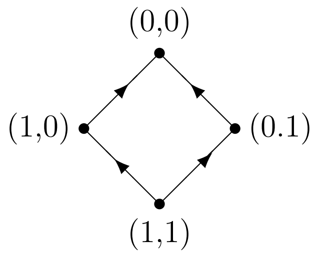
7.5 Beispiel: Dagegen erfüllt folgendes Spiel die Bedingungen.



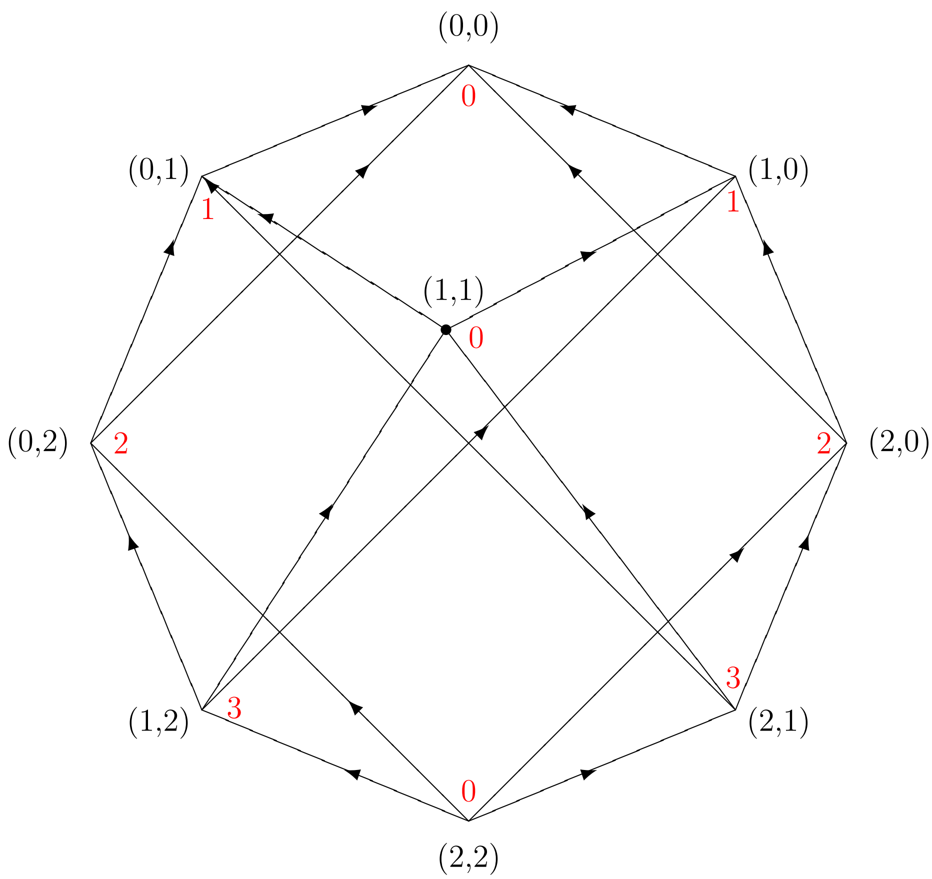
Die roten Zahlen an den Positionen sind die Sprague-Grundy-Zahlen aus Definition 7.9.

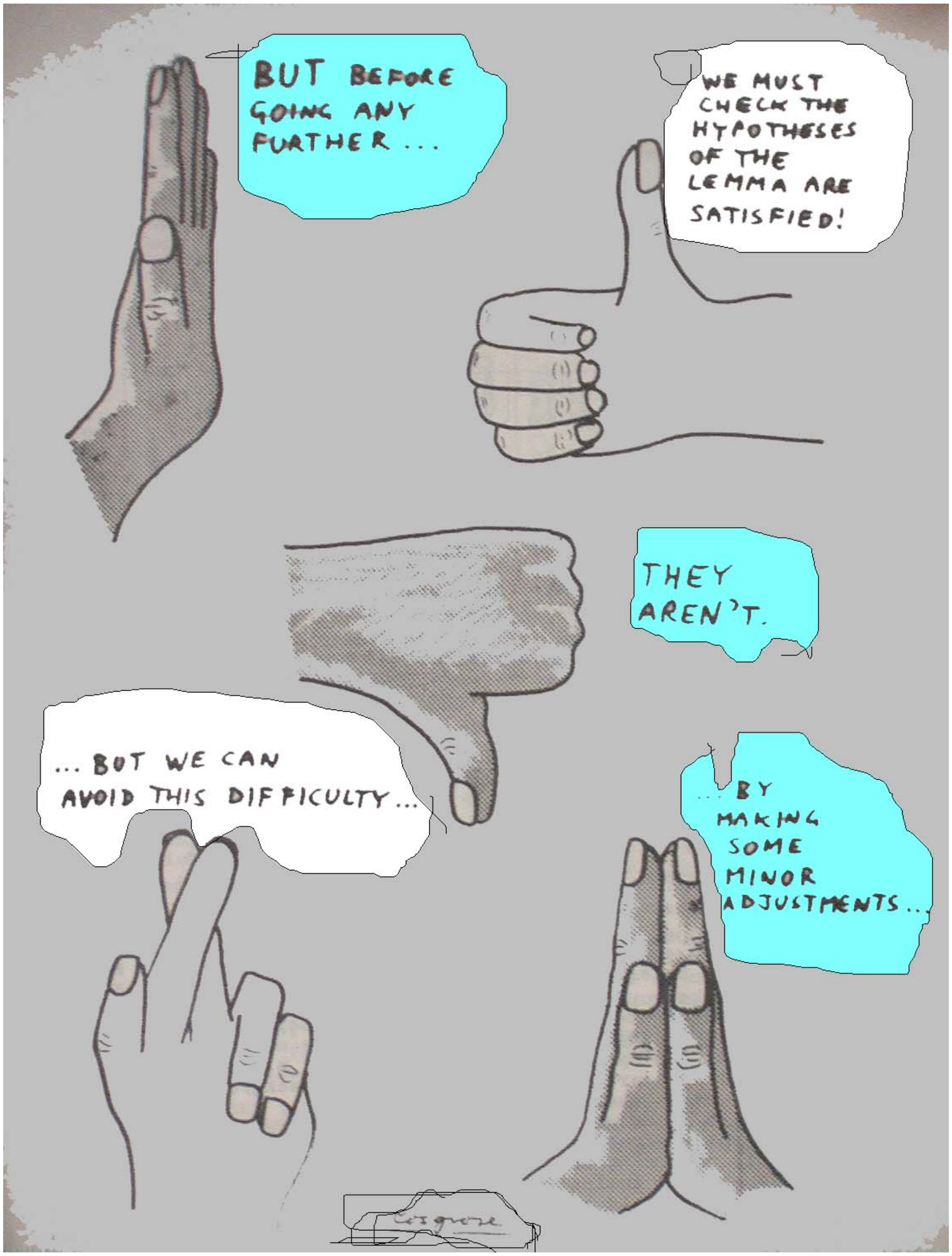
7.6 Beispiel: Nim und seine von uns definierten Varianten sind Nim-ähnlich.

Graph von Nim(1,1):



Graph von Nim(2,2):




BUT BEFORE GOING ANY FURTHER ...
WE MUST CHECK THE HYPOTHESES OF THE LEMMA ARE SATISFIED!
THEY AREN'T.
... BUT WE CAN AVOID THIS DIFFICULTY ...
... BY MAKING SOME MINOR ADJUSTMENTS ...

7.9 Definition. *Sprague-Grundy-Zahlen.*
Gegeben sei ein Nim-ähnliches Spiel mit Positionenmenge S. Dann definieren wir rekursiv eine Funktion $G : S \longrightarrow \mathbb{N}$ wie folgt:

(i) Rekursionsanfang: $G(E) := 0$ für jede Endposition E.

(ii) Rekursionsformel: Ist $P \in S$ und $G(P')$ ist für alle $P' \in Z(P)$ schon definiert (also für alle P', zu denen man von P aus ziehen kann), dann setzen wir

$$G(P) := \text{ Minimum } (\mathbb{N} \setminus \{G(P') \mid P' \in Z(P)\}) \, ,$$

d.h. $G(P)$ ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht Element der endlichen Menge $\{G(P') \mid P' \in Z(P)\}$ ist.

Die Zahl $G(P)$ nennt man nach den Erfindern auch Sprague-Grundy-Zahl von P; wir wollen i.f. der Einfachheit halber von $G(P)$ als dem Wert von P sprechen.

7.7 Beispiel: (1) Nim(n).

Es ist $G(\text{Nim}(0)) = 0$; von Nim(1) kann man nur nach Nim(0) ziehen, also ist $G(\text{Nim}(1)) = \text{Minimum } (\mathbb{N} \setminus \{0\}) = 1$; von Nim(2) kann man nach Nim(0) und Nim(1) ziehen, also ist $G(\text{Nim}(2)) = \text{Minimum } (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) = 2$; Mit vollständiger Induktion bekommen wir $G(\text{Nim}(n)) = n$.

(2) Nim(n_1, n_2).

Beschreiben wir zuerst $Z(Nim(n_1, n_2))$: Von Nim(n_1, n_2) kann man nach Nim(ℓ, n_2) mit $0 \leq \ell < n_1$ oder nach Nim(n_1, k) mit $0 \leq k < n_2$ ziehen. Daher ist

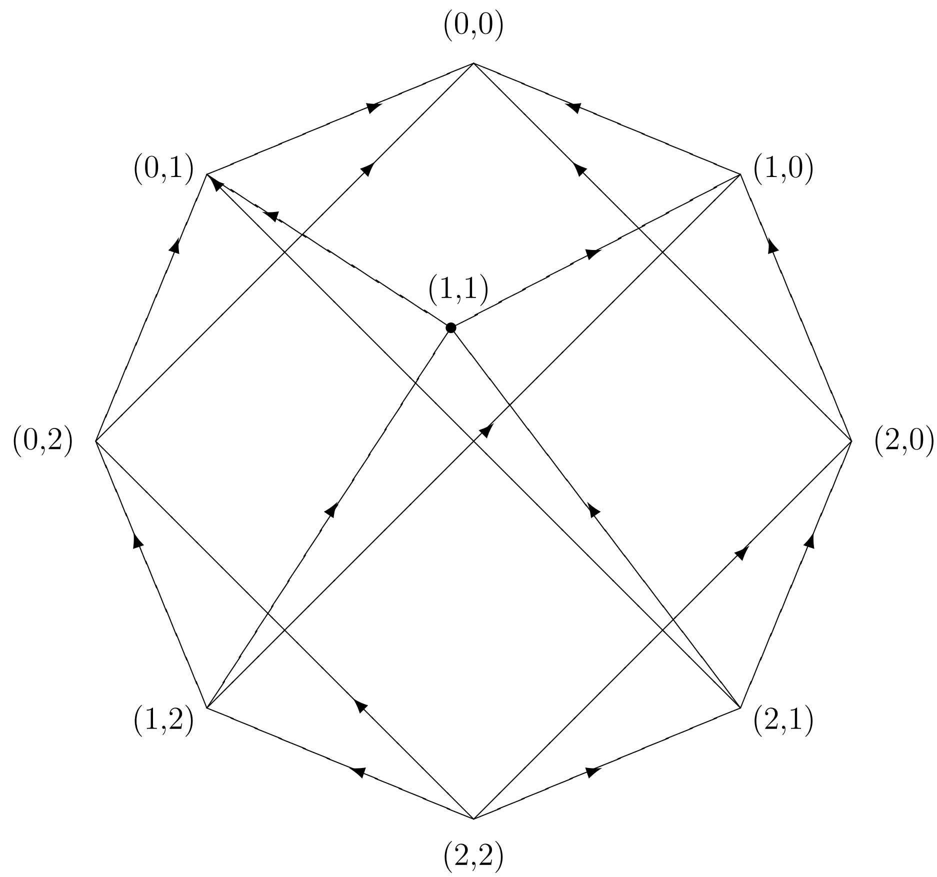
$$G(\text{Nim}(n_1, n_2)) = \text{ Minimum } (\mathbb{N} \setminus \{G(\ell, n_2), G(n_1, k) \mid 0 \leq \ell < n_1 \, , \; 0 \leq k < n_2\}) \, .$$

In Aufgabe 7.7 haben wir experimentell festgestellt, dass die so definierte Zahl gerade $n_1 \oplus n_2$ ist. In der Tat werden wir dies im nächsten Abschnitt beweisen.

(3) In den Beispiel-Graphen haben wir die Werte in rot neben die Positionen geschrieben.

7.10 Aufgabe. Ergänzen Sie den folgenden Graphen von Nim(2, 2) zu dem

Graphen von W-Nim$(2,2)$ und schreiben Sie die Werte der Positionen auf.



Fazit: Versuchen wir einmal unseren Kenntnisstand zusammenzufassen:

Kennen wir alle Sprague-Grundy-Zahlen eines Nim-ähnlichen Spiels, so können wir optimal „spielen". Wenn ich z.B. bei einer Position P dran bin zu ziehen, und es ist $G(P) \neq 0$, so kann ich nach Definition von $G(P)$ in eine Position P' ziehen mit $G(P') = 0$. Entweder habe ich dann schon gewonnen oder mein Partner zieht in eine Position P'' mit $G(P'') \neq 0$, usw.

Das Problem ist, die Sprague-Grundy-Zahlen zu berechnen. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, was Sie alle vielleicht schon vermuten, dass $G(\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)) = n_1 \oplus \ldots \oplus n_r$ ist.

Eine kleine Überlegung ist noch nachzutragen: Wieso liefert das Verfahren in Definition 7.9 für **jede** Position einen Wert $G(P)$? Könnte es eventuell vorkommen, dass gewisse Positionen nicht erreicht werden?

7.4 Satz. *Für ein Nim-ähnliches Spiel mit Positionenmenge S liefert das Verfahren in Definition 7.9 wirklich eine Funktion $G : S \longrightarrow \mathbb{N}$.*

Beweis: Sei S_i die Menge der Positionen, sodass G auf S_i nach dem i-ten Schritt definiert ist; nehmen wir an, dass $S_i \neq S$ ist. Dann sollten wir zeigen, dass es eine Position $P \notin S_i$ mit $Z(P) \subset S_i$ gibt; für diese Position P können wir $G(P)$ definieren. Da es insgesamt nur endlich viele Positionen gibt, führt das Verfahren also zu einem „guten Ende“.

Um die Behauptung

$$\bigvee_{P \in S \smallsetminus S_i} Z(P) \subset S_i$$

zu zeigen, wenden wir die Kontraposition an. Aus der Verneinung

$$\bigwedge_{P \in S \smallsetminus S_i} Z(P) \not\subset S_i$$

folgt, dass man in $S \smallsetminus S_i$ beliebig „lange“ herumziehen kann, d.h. es gilt die Verneinung unserer Voraussetzungen über das Spiel, weil dann (iv) nicht erfüllt ist. $\square$

7.4 Analyse von Nim mittels Sprague-Grundy-Zahlen

Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu beweisen, dass der in Definition 7.6 definierte Wert $G(\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)) = n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_r$ gleich der Sprague-Grundy-Zahl von $\mathrm{Nim}(n_1, \ldots, n_r)$ ist. Damit ist dann auch geklärt, dass man die Nim-Addition auf dem unendlichen Spielbrett rekursiv mit der Rekursionsformel

$$m \oplus n = \text{ Minimum } (\mathbb{N} \smallsetminus \{m' \oplus n,\, m \oplus n' \mid m' < m,\, n' < n\})$$

erhält.

7.10 Definition. *Summe von Spielen.*
Seien S_1, S_2 Spiele (I. f. unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen dem Spiel S_1 und der Menge seiner Positionen, eben S_1). Die „Summe“ $S_1 \oplus S_2$ wird wie folgt gespielt: Die Menge der Positionen ist $S_1 \times S_2$. Ein erlaubter Zug von der Position (P_1, P_2) aus ist entweder ein erlaubter Zug in S_1 von P_1 nach P_1' (in $S_1 \oplus S_2$ ist dann die Position (P_1', P_2) erreicht) oder (im ausschließlichen Sinne) ein erlaubter Zug in S_2 von P_2 nach P_2' (also in $S_1 \oplus S_2$ von (P_1, P_2) nach (P_1, P_2')). M.a.W. $Z(P_1, P_2) = Z(P_1) \times \{P_2\} \cup \{P_1\} \times Z(P_2)$.

Bemerkung: Am leichtesten kann man sich $S_1 \oplus S_2$ vielleicht so vorstellen: Vor mir und meinem Partner sind S_1 und S_2 aufgestellt. Wir spielen dann nach gewissen Regeln beide Spiele zugleich. Wenn einer dran ist zu ziehen, schaut er nach, wo ist S_1 angekommen, wo S_2, und entscheidet sich dann, in genau einem der Spiele S_1, S_2 einen erlaubten Zug zu machen.

7.8 Beispiel: (1) $\mathrm{Nim}(n_1, n_2) = \mathrm{Nim}(n_1) \oplus \mathrm{Nim}(n_2)$.

(2) $\mathrm{Nim}(n_1, \dots, n_r) = \mathrm{Nim}(n_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Nim}(n_r)$.

Zu überlegen wäre noch, was hier „=“ eigentlich bedeutet und ob „$\oplus$“ assoziativ ist.

7.11 Aufgabe. Was bedeutet Ihrer Meinung nach „=“ und ist dann die Assoziativität $S_1 \oplus (S_2 \oplus S_3) = (S_1 \oplus S_2) \oplus S_3$ gesichert ?

7.12 Aufgabe. Wenn S_1, S_2 Nim-ähnlich sind, ist dann auch $S_1 \oplus S_2$ Nim-ähnlich ?

7.5 Satz. *Sind S_1, S_2 Nim-ähnlich, dann ist auch $S_1 \oplus S_2$ Nim-ähnlich. Ist $(P_1, P_2) \in S_1 \oplus S_2$ eine Position, dann ist $G(P_1, P_2)$ die Summe $G(P_1) \oplus G(P_2)$ in der Nim-Addition $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. (Merke an: $G(P_1, P_2)$ bezeichnet den Wert von (P_1, P_2) im Spiel $S_1 \oplus S_2$, während $G(P_1)$, $G(P_2)$ die Werte von P_1 bzw. P_2 im Spiel S_1 bzw. S_2 bezeichnen).*

Beweis: Die erste Aussage ist mit Aufgabe 7.12 erledigt. Für das weitere benötigen wir ein Hilfsmittel:

Hilfssatz: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $a \oplus b > c$. Dann gilt entweder $a > b \oplus c$ oder $b > a \oplus c$. $\square$

Beweis: Sei i die größte natürliche Zahl mit $\varepsilon_i(a \oplus b) \neq \varepsilon_i(c)$. D.h. in den dyadischen Darstellungen von $a \oplus b$ und c ist i die erste Stelle von links aus gesehen, wo sich die Darstellungen von $a \oplus b$ und c unterscheiden:

$$\begin{array}{rc|c|l} a \oplus b & \boxed{} & 1 & ???\ \ \dots\ \ ? \\ c & \boxed{} & 0 & ???\ \ \dots\ \ ? \\ & & \uparrow & \\ & & i & \end{array}$$

Wegen $a \oplus b > c$ ist dann $\varepsilon_i(a \oplus b) = 1$ und $\varepsilon_i(c) = 0$ (weil $\sum\limits_{\ell=0}^{i-1} 2^\ell < 2^i$). Wir betrachten nun die zwei Fälle

(i) $\varepsilon_i(a) = 1$ und $\varepsilon_i(b) = 0$ oder

(ii) $\varepsilon_i(a) = 0$ und $\varepsilon_i(b) = 1$.

Wir setzen $a_1 := \sum\limits_{k=i+1}^{\infty} \varepsilon_k(a) 2^k$, entsprechend definieren wir b_1 und c_1; ferner sei $a_2 := \sum\limits_{\ell=0}^{i} \varepsilon_\ell(a) 2^\ell$ und entsprechend seien b_2, c_2 definiert.

Hier sind ein paar „Facts“:

Es ist $a_1 \oplus b_1 = c_1$ (nach Wahl von i), und damit ist $a_1 = b_1 \oplus c_1$, $b_1 = a_1 \oplus c_1$ (wegen der Eigenschaften der Nim-Addition; wieso ?).

Ferner gilt $a = a_1 + a_2 = a_1 \oplus a_2$, entsprechend für b, c.

Also nun zu Fall (i):

$$a = a_1 \oplus a_2 = b_1 \oplus c_1 \oplus a_2$$

Es ist $a_2 \geq 2^i > b_2 \oplus c_2$. Also haben wir

$$a > b_1 \oplus c_1 \oplus b_2 \oplus c_2 = b \oplus c\,.$$

Der Fall (ii) ist analog. $\square$

7.13 Aufgabe. (a) Rechnen Sie nach, ob $11 \oplus 5 > 13$ richtig ist.

(b) Stellen Sie nun fest, ob

(i) $\quad 11 > 5 \oplus 13$ oder

(ii) $\quad 5 > 11 \oplus 13$ gilt.

Beweis des Satzes: Wir führen eine Induktion durch.

Induktionsanfang: Eine Endposition von $S_1 \oplus S_2$ ist ein Paar (E_1, E_2) von Endpositionen, $E_1 \in S_1$, $E_2 \in S_2$. Dann ist per Definition $G(E_1, E_2) = 0 = G(E_1) \oplus G(E_2)$.

Induktionsschritt: Sei (P_1, P_2) eine Position, sodass schon für alle Positionen (P_1', P_2), $P_1' \in Z(P_1)$, und (P_1, P_2'), $P_2' \in Z(P_2)$ die Gleichung $G(P_1', P_2) = G(P_1') \oplus G(P_2)$ sowie $G(P_1, P_2') = G(P_1) \oplus G(P_2')$ etabliert ist. Dann haben wir $G(P_1, P_2) = G(P_1) \oplus G(P_2)$ zu folgern.

Nach Definition ist

$$G(P_1, P_2) = \text{ Minimum } (\mathbb{N} \setminus \{G(P_1') \oplus G(P_2)\,,\ G(P_1) \oplus G(P_2') \mid \\ P_1' \in Z(P_1)\,,\ P_2' \in Z(P_2)\})\,.$$

Wir zeigen nun:

(1) $G(P_1) \oplus G(P_2) \neq G(P_1') \oplus G(P_2)$ für alle $P_1' \in Z(P_1)$ (und entsprechend $G(P_1) \oplus G(P_2) \neq G(P_1) \oplus G(P_2')$ für alle $P_2' \in Z(P_2)$).

Denn aus $G(P_1) \oplus G(P_2) = G(P_1') \oplus G(P_2)$ folgt $G(P_1) = G(P_1')$, das ist falsch. Also ist $G(P_1) \oplus G(P_2) \neq G(P_1') \oplus G(P_2)$.

(2) Jede natürliche Zahl $m < G(P_1) \oplus G(P_2)$ kommt unter den Zahlen $G(P_1') \oplus G(P_2)$ und $G(P_1) \oplus G(P_2')$ vor.

Nach dem Hilfssatz gilt

(i) $\quad G(P_1) > G(P_2) \oplus m$ oder

(ii) $\quad G(P_2) > G(P_1) \oplus m$.

Im Falle (i) gibt es im Spiel S_1 einen Zug von P_1 zu einer Position P_1' mit $G(P_1') = G(P_2) \oplus m$.

Dann ist $G(P_1', P_2) = G(P_1') \oplus G(P_2)$ (nach Induktionsvoraussetzung) und folglich

$$G(P_1', P_2) = G(P_2) \oplus m \oplus G(P_2) = m\,.$$

Fall (ii) wird mit Spiel S_2 abgehandelt.

Also ist $G(P_1) \oplus G(P_2) = G(P_1, P_2)$. $\square$

7.5 Literatur

Warnung: Der Name „Spieltheorie“ bezieht sich üblicherweise auf eine Theorie der Entscheidung in der Ökonomie und Politik, die nichts mit der hier angedeuteten Theorie „kombinatorischer Spiele“ zu tun hat.

1. F.R. Berlekamp, J.H. Conway, P.K. Guy: Winning Ways. Academic Press 1982.

2. C.L. Bouton: Nim, a game with a complete mathematical theory. Annals of Mathematics 3(1902), 35-39.

   Dieser Artikel gibt ohne weiteren Kommentar die in 7.2 angestellte Analyse.

3. J.H. Conway: On Numbers and Games. Academic Press 1976.

   Die Bemerkung in 3.4 zu dieser Referenz gilt auch hier.

4. M. Gardner: Penrose Tiles to Trap Door Ciphers. W.H. Freeman 1997.

   In Chapter 8 wird eine nett geschriebene Geschichte und Analyse von Wythoff-Nim gegeben.

5. Y. Yamasaki: On misère Nim-type games. Journal Mathematical Society Japan 32(1980), 461-475.

   Der Beweis in 7.4 folgt diesem Artikel.

6. J.Waldmann: Kombinatorische Spieltheorie.

A Anhang

Ein kurzer Blick auf die komplexen Zahlen

A.1 Definition. (1) Als Menge sei $\mathbb{C} := \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.
(2) Die Elemente $(a,b), (\widetilde{a},\widetilde{b}) \in \mathbb{C}$ werden nach der Regel

$$(a,b) + (\widetilde{a},\widetilde{b}) := (a+\widetilde{a}, b+\widetilde{b})$$

addiert,
(3) und sie werden nach der Regel

$$(a,b)(\widetilde{a},\widetilde{b}) := (a\widetilde{a} - b\widetilde{b}, a\widetilde{b} + \widetilde{a}b)$$

multipliziert.
(4) Die Menge $\mathbb{C}$ zusammen mit dieser Addition und Multiplikation nennen wir „Körper der komplexen Zahlen“. Der Ausdruck „Körper“ bezieht sich dabei darauf, dass die Addition und Multiplikation allen in der folgenden Aufgabe zusammengestellten Rechenregeln genügen. Man kann deshalb auch z.B. vom Körper der reellen Zahlen, oder vom Körper der rationalen Zahlen sprechen.

A.1 Aufgabe. Zeigen Sie, dass die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ folgenden Rechenregeln genügen:

(i) Die Additon ist assoziativ und kommutativ, das Element (0,0) ist ein neutrales Element für „+“, d.h.

$$\bigwedge_{(a,b)\in\mathbb{C}} (a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = (a,b)\,.$$

Ferner ist $(0,0)$ das einzige Element in $\mathbb{C}$ mit dieser Eigenschaft.

Zu jeder komplexen Zahl $(a,b) \in \mathbb{C}$ gibt es genau eine Zahl $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ mit $(a,b) + (\widetilde{a},\widetilde{b}) = (0,0)$ (Wegen der Kommutativität von „+“ ist dann auch $(\widetilde{a},\widetilde{b}) + (a,b) = (0,0)$). Es ist $(\widetilde{a},\widetilde{b}) = (-a,-b)$.

(ii) Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ. Das Element $(1,0)$

ist ein neutrales Element für „·“, d.h.

$$\bigwedge_{(a,b)\in\mathbb{C}} (a,b)(1,0) = (a,b) = (1,0)(a,b)\,.$$

Und $(1,0)$ ist das einzige Element mit dieser Eigenschaft.

Für jedes Element $(a,b) \neq (0,0)$ gibt es genau ein Element $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ mit $(a,b)(\widetilde{a},\widetilde{b}\,) = (1,0)$. (Es ist $(\widetilde{a},\widetilde{b}\,) := (a/a^2+b^2, -b/a^2+b^2)$.)

(Zur Erinnerung: Für eine reelle Zahl $r \geq 0$ ist $\sqrt{r}$ diejenige reelle Zahl $s \geq 0$ mit $s^2 = r$).

(iii) Addition und Multiplikation sind durch das Distributivgesetz miteinander verwoben, d.h.

$$\bigwedge_{(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in\mathbb{C}} ((a,b)+(a',b'))(a'',b'') = ((a,b)(a'',b''))+((a',b')(a'',b'')),$$

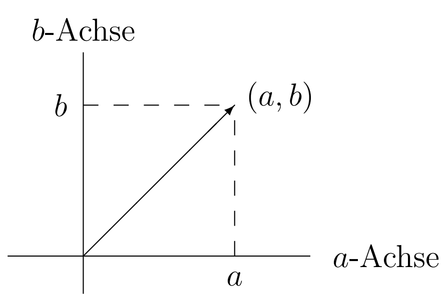
wegen der Kommutativität von Addition und Multiplikation gilt dann auch die Formel

$$(a'',b'')((a,b)+(a',b')) = ((a'',b'')(a,b)) + ((a'',b'')(a',b'))\,.$$

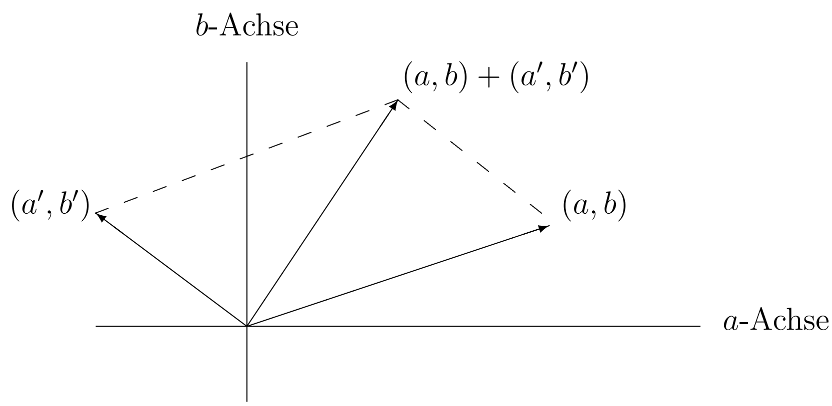
Wenn wir – wie üblich – vereinbaren, dass „·“ stärker bindet als „+“ können wir gewisse Klammern weglassen, z.B.

$$(a'',b'')((a,b)+(a',b')) = (a'',b'')(a,b) + (a'',b'')(a',b')\,.$$

Veranschaulichen wollen wir uns die komplexen Zahlen als Vektoren in der Ebene.



Die Addition erhält man anschaulich dann durch Parallelogramm-Bildung:



Die Veranschaulichung der Multiplikation folgt unten.

A.1 Satz. *Die Abbildung* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \longmapsto (a, 0)$, *ist additiv, das heißt*

$$\bigwedge_{a,b\in\mathbb{R}} \phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)\,,$$

und sie ist multiplikativ, d.h.

$$\bigwedge_{a,b\in\mathbb{R}} \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)\,.$$

Beweis: Als Aufgabe. □

Fazit: Wir können uns $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ vorstellen, $\mathbb{R} = \{(a, 0) \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\}$. Ob wir dann zwei reelle Zahlen als reelle Zahlen addieren (oder multiplizieren) oder als komplexe Zahlen, das Resultat bleibt gleich.

A.2 Satz. *Jede komplexe Zahl* z *läßt sich eindeutig in der Form*

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

schreiben.

Beweis: Als Aufgabe. □

A.2 Definition. Wir bezeichnen mit i die komplexe Zahl $(0, 1)$. Dann läßt sich also jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ eindeutig in der Form

$$z = a + bi$$

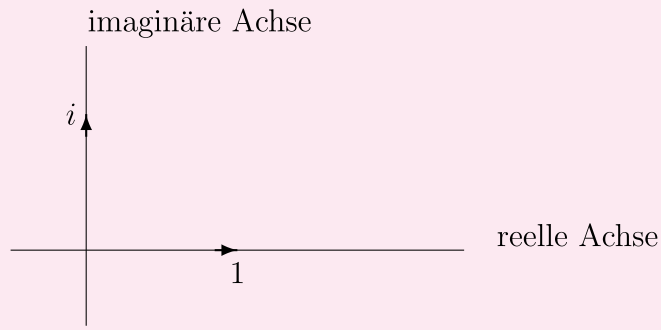
mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben ($a = (a, 0)$, $b = (b, 0)$ in $\mathbb{C}$).

A.2 Aufgabe. Verifizieren Sie $i^2 = -1$.

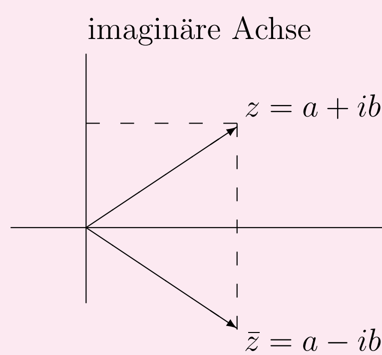
A.3 Definition. Sei $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) Wir nennen a den Realteil $Re(z)$ von z und b den Imaginärteil $Im(z)$ von z.

(2) Die a-Achse nennen wir ab jetzt „reelle Achse" und die b-Achse „imaginäre Achse".



(3) Die Zahl $\bar{z} = a - bi$ heißt die zu z „komplex konjugierte" Zahl.



Wir erhalten $\bar{z}$ aus z durch Spiegeln an der reellen Achse.

A.3 Aufgabe. (a) Die komplexe Zahl z ist reell genau dann, wenn $\bar{z} = z$ ist.

(b) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

(c) $\bigwedge\limits_{z \in \mathbb{C}} \bar{\bar{z}} = z$.

Anmerkung: Die Multiplikation der komplexen Zahlen $(a + bi)$, $(a' + b'i)$ kann man mit dem Distributivgesetz und der Beziehung $i^2 = -1$ leicht hinschreiben:

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + bb'i^2 + ab'i + a'bi \\ &= (aa' - bb') + (ab' + a'b)i\end{aligned}$$

(Diese Formel hatte man bei der Definition der Multiplikation von $\mathbb{C}$ im Sinn!).

A.4 Definition. Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$, a, b reell, sei

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(gelesen: „Betrag von } z\text{“).}$$

Spezialfall: Ist a reell, dann gilt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0\,, \\ -a & \text{falls } a \leq 0\,. \end{cases}$$

A.3 Satz. *Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ mit a, b reell.*

(a) Es ist $|z| \geq 0$, und „$|z| = 0$“ ist äquivalent zu „$z = 0$“.

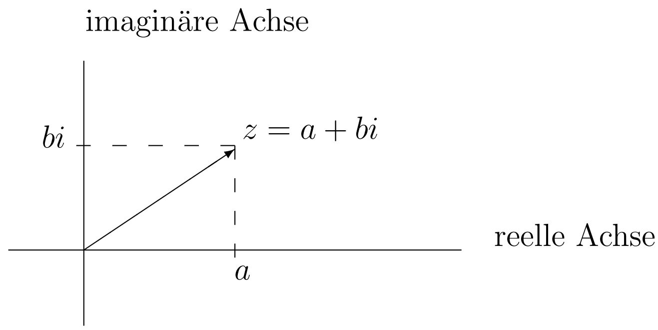
(b) Es ist $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, denn $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Es folgt $|\bar{z}| = |z|$.

(c) $|Re(z)|$, $|Im(z)| \leq |z|$,

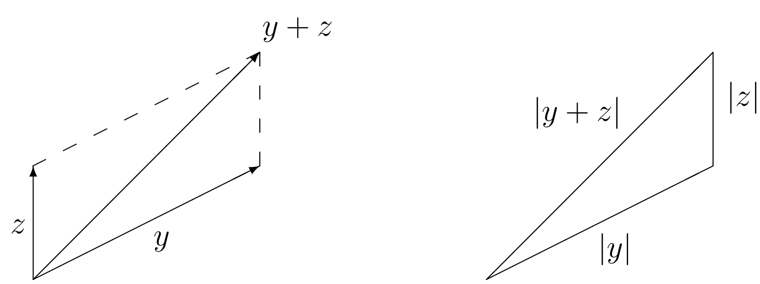
(d) $\bigwedge\limits_{y,z \in \mathbb{C}} |yz| = |y|\,|z|$,

(e) $\bigwedge\limits_{y,z \in \mathbb{C}} |y + z| \leq |y| + |z|$.

Anmerkung: Nach dem Satz von Pythagoras ist $|z|$ die „Länge " des Vektors z:



Die Ungleichung in (e) heißt „Dreiecksungleichung“, weil in einem Dreieck die Länge einer Seite kleiner gleich der Summe der Längen der anderen beiden Seiten ist:



Beweis von Satz A.3: Wir zeigen hier nur (e). Um zu beweisen, dass $|y+z| \leq |y|+|z|$ gilt, genügt es nachzuprüfen, dass $|y+z|^2 \leq (|y|+|z|)^2$ ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} |y+z|^2 = (y+z)(\overline{y+z}) &= (y+z)(\bar{y}+\bar{z}) \quad \text{(nach Aufgabe A.3)} \\ = y\bar{y} + z\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{z} &= |y|^2 + 2Re(z\bar{y}) + |z|^2 \end{aligned}$$

Denn für jede komplexe Zahl x ist $2Re(x) = x + \bar{x}$; ferner ist $y\bar{z} = \overline{z\bar{y}}$, also ist $z\bar{y} + y\bar{z} = 2Re(z\bar{y})$.

Mit $Re(z\bar{y}) \leq |z\bar{y}| = |z|\,|\bar{y}| = |z|\,|y|$ erhalten wir:

$$|y|^2 + 2Re(z\bar{y}) + |z|^2 \leq |y|^2 + 2|z|\,|y| + |z|^2 = (|y|+|z|)^2 \,.$$

□

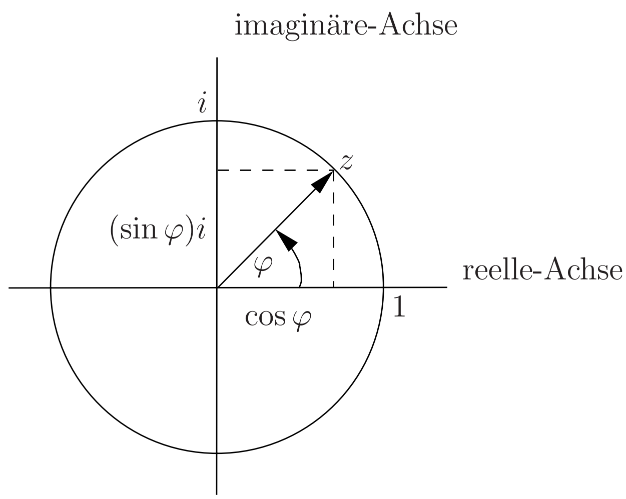
Einheitskreis:

Den Kreis S^1 mit Radius 1 in der Ebene, den sogenannten „Einheitskreis“ stellen wir uns als

$$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$$

vor. Sehen wir die Ebene als komplexe Zahlenebene an, dann ist dies

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}\,.$$



Ein $z \in S^1$ können wir dann schreiben als $z = \cos\varphi + (\sin\varphi)i$ mit einem Winkel φ, der bis auf Vielfache von 2π definiert ist.

Veranschaulichung der Multiplikation:

Sei $z_1 = \cos\varphi_1 + (\sin\varphi_1)i$, $z_2 = \cos\varphi_2 + (\sin\varphi_2)i$, dann rechnen wir:

$$z_1z_2 = (\cos\varphi_1)(\cos\varphi_2) - (\sin\varphi_1)(\sin\varphi_2) + ((\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2) + (\cos\varphi_1)(\sin\varphi_2))i\,.$$

Sind einem die Additionstheoreme für cos und sin bekannt, kann man also schließen:

$$z_1z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + (\sin(\varphi_1 + \varphi_2))i$$

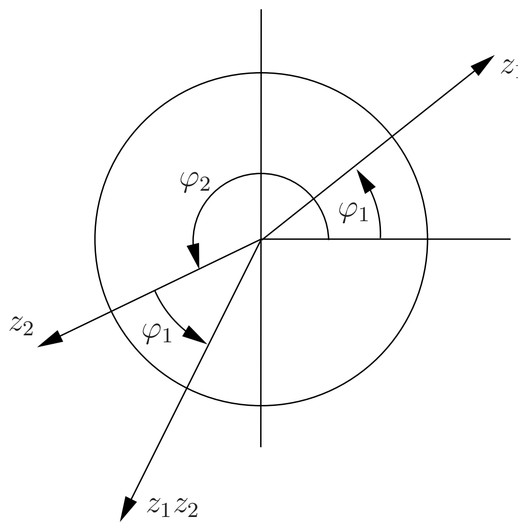
(Umgekehrt kann man sich so die Additionstheoreme leicht merken).

Seien nun $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Setze $r_1 := |z_1|$, $r_2 := |z_2|$, dann sind $z_1 \cdot (1/r_1)$, $z_2 \cdot (1/r_2)$ vom Betrag 1, also gibt es Winkel φ_1, φ_2 mit

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + (\sin\varphi_1)i)\,, \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + (\sin\varphi_2)i)$$

und

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + (\sin(\varphi_1 + \varphi_2))i)\,.$$



A.4 Aufgabe. Berechnen Sie

(a) i^{17},

(b) $(1+i)^7$,

(c) die Zahl $a + bi$ mit $(a + bi)(4 + 3i) = 1$.

A.5 Aufgabe. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in x, y mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} x + iy &= i + 1 \\ x - y &= 2i \end{aligned}$$

A.6 Aufgabe. Geben Sie die Lösung der quadratischen Gleichungen an:

(a) $x^2 + 1 = 0$,

(b) $x^2 - 2i = 0$,

(c) $x^2 + 5(1 - i)x - 13i = 0$.

A.7 Aufgabe. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es genau n verschiedene komplexe Zahlen $u_0, \ldots, u_{n-1}$ gibt mit $u_i^n = z$.

Hinweis: Ist $z = r(\cos\varphi + (\sin\varphi)i)$, r reell und $r > 0$, dann sind die Zahlen $u_k := \sqrt[n]{r}(\cos(\varphi + k2\pi/n) + \sin(\varphi + k2\pi/n)i$ die Kandidaten. (Anmerkung: Hier meinen wir mit $\sqrt[n]{r}$ diejenige positive reelle Zahl q mit $q^n = r$ – von deren eindeutiger Existenz man sich im Laufe der Vorlesung „Analysis“ überzeugen kann).

A.8 Aufgabe. Geben Sie speziell die Zahlen u_0, u_1, u_2 mit $u_k^3 = 1$ für $k = 0, 1, 2$ an.

Literatur: Vergl. Sie die Hinweise in 3.4

B Anhang

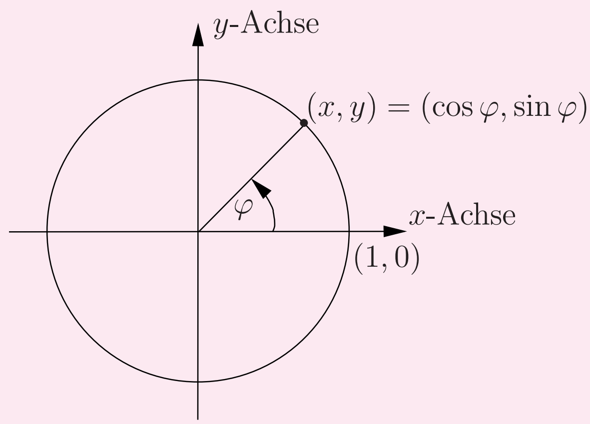
Immersionen der Kreislinie in die Ebene

Dieser Abschnitt soll dazu dienen, einen flüchtigen Eindruck (ohne jeglichen Beweis) von einem Bereich der Mathematik zu geben, der bisher sehr zu kurz gekommen ist, nämlich der Beschreibung kontinuierlicher Phaenomene. Versuchen Sie einfach nur, den anschaulichen Beschreibungen zu folgen.

B.1 Definition. Die Kreislinie vom Radius $r > 0$ ist

$$S_r^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\} .$$

Den „Einheitskreis“ S_1^1 bezeichnen wir mit S^1.



Ein Punkt $(x, y) \in S^1$ (wie in der Zeichnung) wird durch einen Winkel φ mit $(x, y) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ beschrieben, wobei alle Winkel $\varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, den gleichen Punkt beschreiben. (Wir werden im folgenden Winkel im Bogenmaß messen, das ist aber nicht wirklich relevant).

Eine Abbildung von S^1 nach $\mathbb{R}^2$ können wir uns dann vorstellen als eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \longmapsto f(\varphi)$, mit der Periode 2π, d.h. $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$ für alle φ.

Ist $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung, so ist für alle $x \in \mathbb{R}$ das Bild $g(x)$ von der Form $(g_1(x), g_2(x))$ mit $g_1(x)$, $g_2(x) \in \mathbb{R}$, d.h. wir bekommen zwei Abbildungen g_1 und g_2 von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die wir die „Komponenten" von g nennen, und $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

B.2 Definition. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Periode 2π heißt „Immersion" von S^1 in $\mathbb{R}^2$, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(i) f ist differenzierbar, d.h. ihre Komponenten f_1 und f_2 sind im üblichen Sinne differenzierbar.

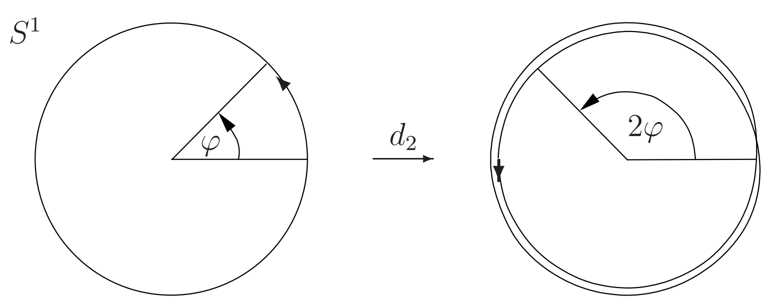
(ii) Die Ableitung f' mit $f'(x) := (f_1'(x), f_2'(x))$ ist stetig (Achtung: „Stetigkeit" haben wir in diesem Kurs nicht definiert. Sie müssen bis Analysis I warten und erst einmal Ihrer Intuition vertrauen).

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung $(f_1'(x), f_2'(x))$ immer verschieden von dem 2-Tupel $(0, 0)$.

B.1 Beispiel: (a) Die Inklusion $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (x, y)$, ist eine Immersion.

(b) Die Abbildung $d_n : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \longmapsto (\cos(n\varphi), \sin(n\varphi))$, ist eine Immersion, die – anschaulich – das Stück $[0, 2\pi]$ n-mal um S^1 herumwickelt.

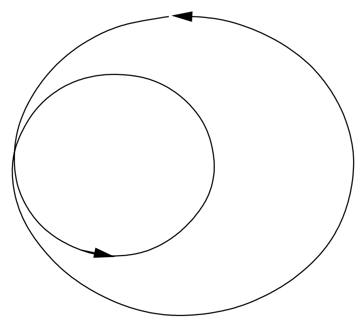
Illustration d_2:



Wenn φ von 0 bis 2π läuft, dann läuft $d_2(\varphi)$ zweimal um S^1 herum.

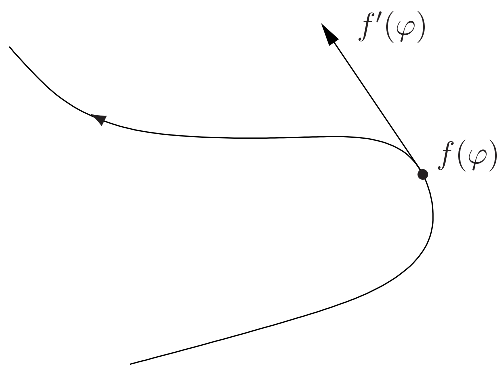
(c) Wir können d_2 etwas auseinanderziehen zu $\widetilde{d}_2$ mit

$\widetilde{d}_2(\varphi) := (1 + \frac{1}{2}\cos(\varphi))\ (\cos(2\varphi), \sin(2\varphi))$.



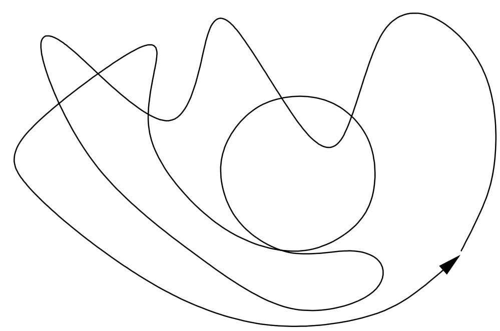
Wir haben ungefähr das Bild von $\widetilde{d}_2$ gezeichnet!

Am besten stellen wir uns eine Immersion dynamisch vor: Wenn φ sich von 0 nach 2π bewegt, dann läuft der Bildpunkt $f(\varphi)$ durch $\mathbb{R}^2$ und ist nach der „Zeit“ 2π wieder im Anfangspunkt $f(0)$. Wenn wir φ als Zeit interpretieren, dann ist das Tupel $(f_1'(\varphi), f_2'(\varphi))$ physikalisch der Geschwindigkeitsvektor der Bewegung im Punkte $f(\varphi)$.



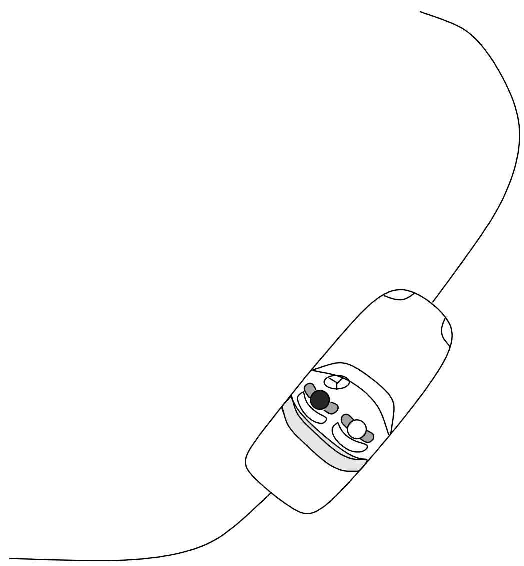
Wer schon von sich bewegenden Objekten abgesprungen ist, weiß sehr wohl, dass der Geschwindigkeitsvektor tangential zur Bewegung in Richtung der

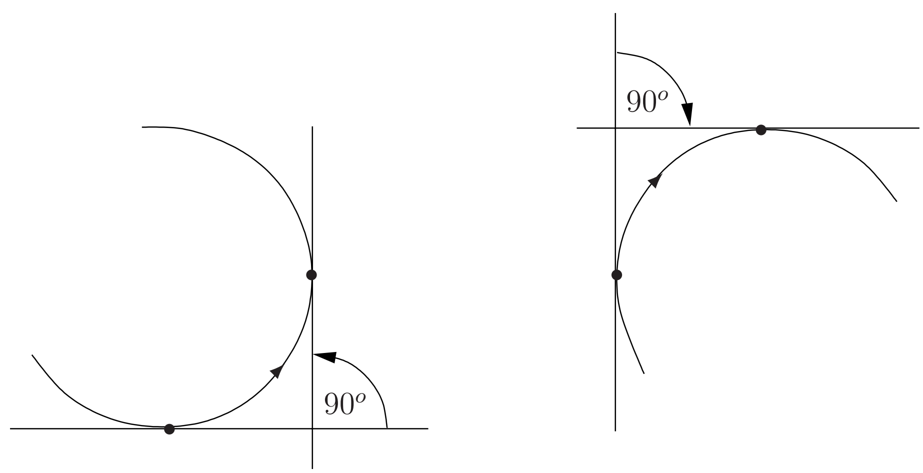
Bewegung zeigt. „Rasen“ führt zu „längeren“ Vektoren. Bild(f) kann recht verwirrend aussehen:



B.3 Definition. Sei f eine Immersion $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Dann stellen wir uns vor, wir fahren auf der Rennstrecke Bild(f) zu zweit in einer Karre. Die rechts sitzende Person führt Buch, wieviel (Winkel) sie nach links gedreht wird, jede Drehung nach rechts (Rechtskurve) ignorierend. Die links sitzende Person konstatiert nur die Drehung nach rechts. Nach einer Periode, d.h. $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird die Gesamtdrehung $u(f) := l - r$ ermittelt (wobei l die ermittelte Drehung nach links und r die nach rechts ist).

B.2 Beispiel: Ermittlung von $u(f)$:

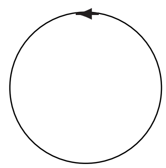




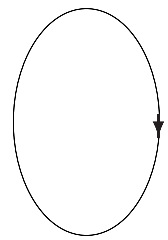
90° nach links   90° nach rechts

B.1 Satz. *Die Zahl $u(f)$ ist immer ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Ferner gibt es zu jedem ganzzahligen Vielfachen $k2\pi$ von 2π eine Immersion g mit $u(g) = k2\pi$.*

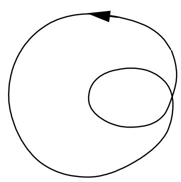
B.3 Beispiel:



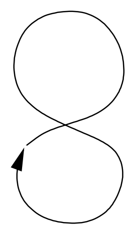
$u = 2\pi$



$u = -2\pi$

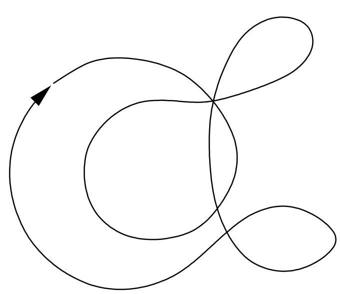


$u = 4\pi$



$u = 0$

B.1 Aufgabe. Ermitteln Sie $u(f)$, wenn Bild(f) wie folgt aussieht:



Video: Deformation

B.4 Definition. Wir sagen, zwei Immersionen f und g sind „ineinander deformierbar“, wenn es eine Abbildung $H : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, sodass gilt:

(i) für jedes $s \in [0,1]$ ist die Abbildung $H_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto H(x,s)$ eine Immersion;

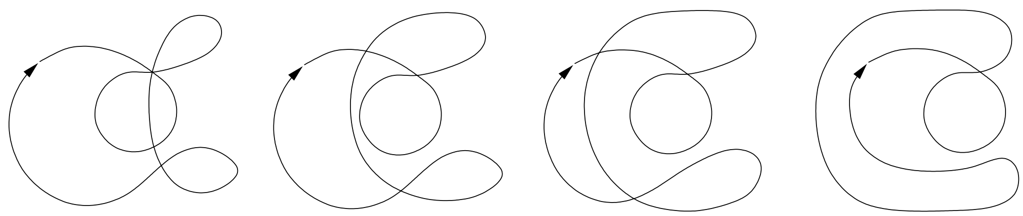
(ii) $H_0 = f$ und $H_1 = g$;

(iii) die Ableitung von H_s nach x ist stetig in (x,s).

B.2 Satz. *Zwei Immersionen f und g sind genau dann ineinander deformierbar, wenn $u(f) = u(g)$ gilt.*

Anmerkung: Die Sätze $1,2$ werden mit der Theorie der Umlaufzahl nach Heinz Hopf bewiesen; danach haben wir auch die Notation $u(f)$ gewählt.

B.4 Beispiel: Wir deformieren:



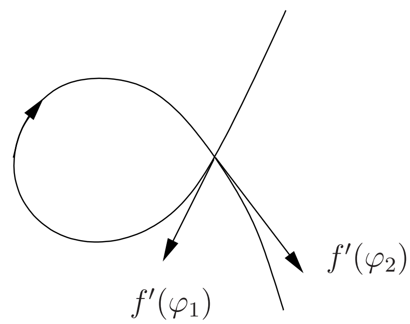
Bild(H_0) Bild($H_{1/3}$) Bild($H_{2/3}$) Bild(H_1)
Also ist $u = 0$

B.5 Definition. Ein Punkt $p \in$ Bild(f) heißt „einfacher Kreuzungspunkt“ der Immersion f wenn gilt:

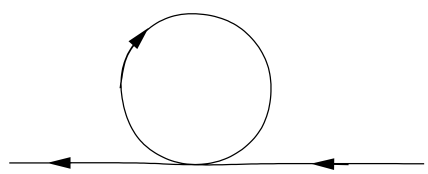
(i) $\{\varphi \mid 0 \leq \varphi < 2\pi \text{ und } f(\varphi) = p\}$ hat genau zwei Elemente; wir notieren sie dann als φ_1, φ_2 mit $\varphi_1 < \varphi_2$.

(ii) die durch die Geschwindigkeitsvektoren $f'(\varphi_1)$ und $f'(\varphi_2)$ definierten Tangenten sind verschieden.

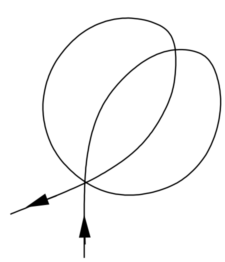
B.5 Beispiel: Einfacher Kreuzungspunkt:



Kein einfacher Kreuzungspunkt (Tangenten gleich!):



Kein einfacher Kreuzungspunkt:



B.6 Definition. Sei $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Immersion.

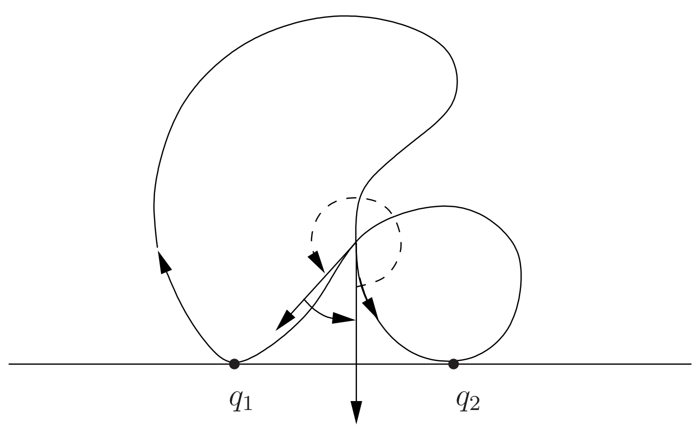
(a) Einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ nennen wir „Startpunkt“ für f, wenn für die Parallele G zur x-Achse durch q gilt, dass erstens $G\cap$ Bild$(f) \neq \varnothing$ ist und zweitens Bild$(f) \smallsetminus G$ ganz oberhalb G liegt.

(b) Wenn wir den Startpunkt q gewählt haben und es ist $q = f(\varphi_0)$, dann betrachten wir statt f die Immersion $\bar{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \longmapsto f(\varphi + \varphi_0)$.

Einen einfachen Kreuzungspunkt p von $\bar{f}$ nennen wir „positiv“, wenn folgendes gilt: Drehen wir die durch den Geschwindigkeitsvektor $\bar{f}'(\varphi_1)$ gerichtete Tangente im Gegenuhrzeigersinn, bis wir die durch $\bar{f}'(\varphi_2)$ gerichtete Tangente erhalten, dann ist der Drehwinkel größer als π; andernfalls nennen wir den Punkt p „negativ“.

(c) Wir setzen ferner $\varepsilon(f) \in \{1, -1\}$ als 1 fest, wenn der Geschwindigkeitsvektor von $\bar{f}$ in q in Richtung der positiven x-Achse zeigt, andernfalls setzen wir $\varepsilon(f) := -1$.

B.6 Beispiel: Betrachten wir eine Immersion mit folgendem Bild:



Wir haben die Wahl zwischen q_1 und q_2 als Anfangspunkt.

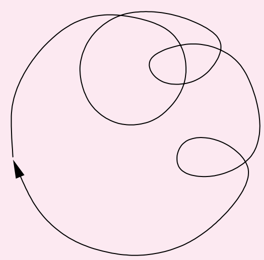
Anfangspunkt q_1: Es ist $\varepsilon(f) = -1$ und der einfache Kreuzungspunkt von $\bar{f}$ ist positiv.

Anfangspunkt q_2: Es ist $\varepsilon(f) = 1$ und der einfache Kreuzungspunkt von $\bar{f}$ ist negativ.

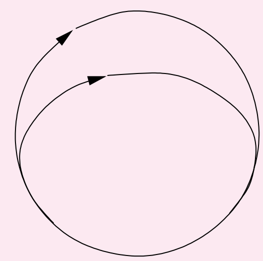
B.7 Definition. Sei $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Immersion.

(a) Ein Punkt $p \in \text{Bild}(f)$ heißt „einfacher Punkt“ von f, wenn $\{\varphi \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, f(\varphi) = p\}$ genau ein Element hat.

(b) Die Immersion f heißt „normal“, wenn $\text{Bild}(f)$ außer einfachen Punkten höchstens endlich viele einfache Kreuzungspunkte hat.



normal

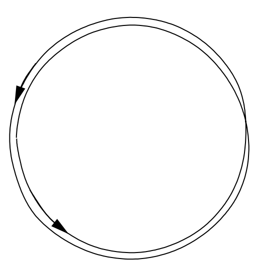


nicht normal

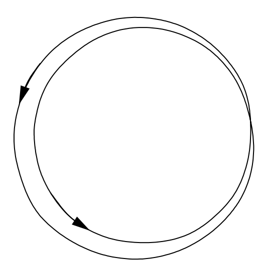
B.3 Satz. *Jede Immersion f kann in eine normale Immersion g deformiert werden. Und es ist $u(f) = (N_+ - N_- + \varepsilon(g))2\pi$, wenn N_+ die Anzahl der positiven einfachen Kreuzungspunkte von $\bar{g}$ und N_- die der negativen einfachen Kreuzungspunkte von $\bar{g}$ ist.*

B.7 Beispiel:

(a)

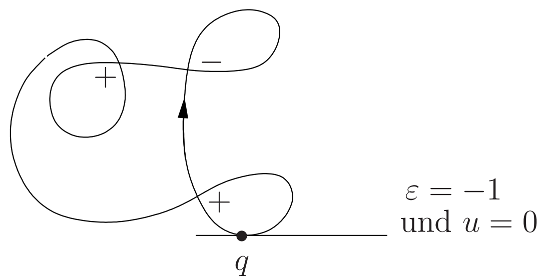


Deformation zu

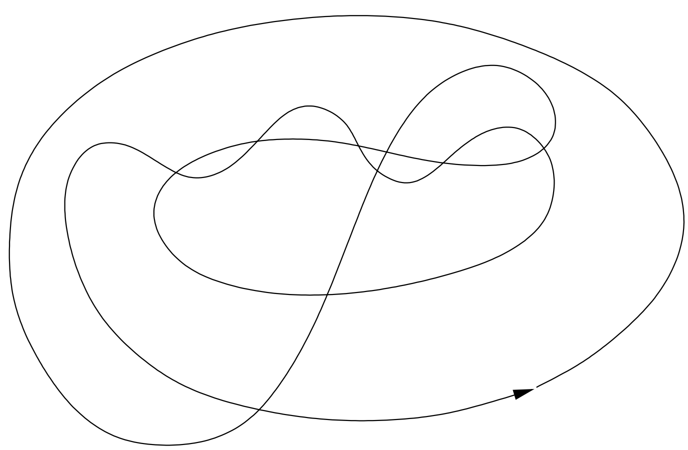


In der linken Zeichnung
denken wir uns S^1 2-mal durchlaufen.

(b)



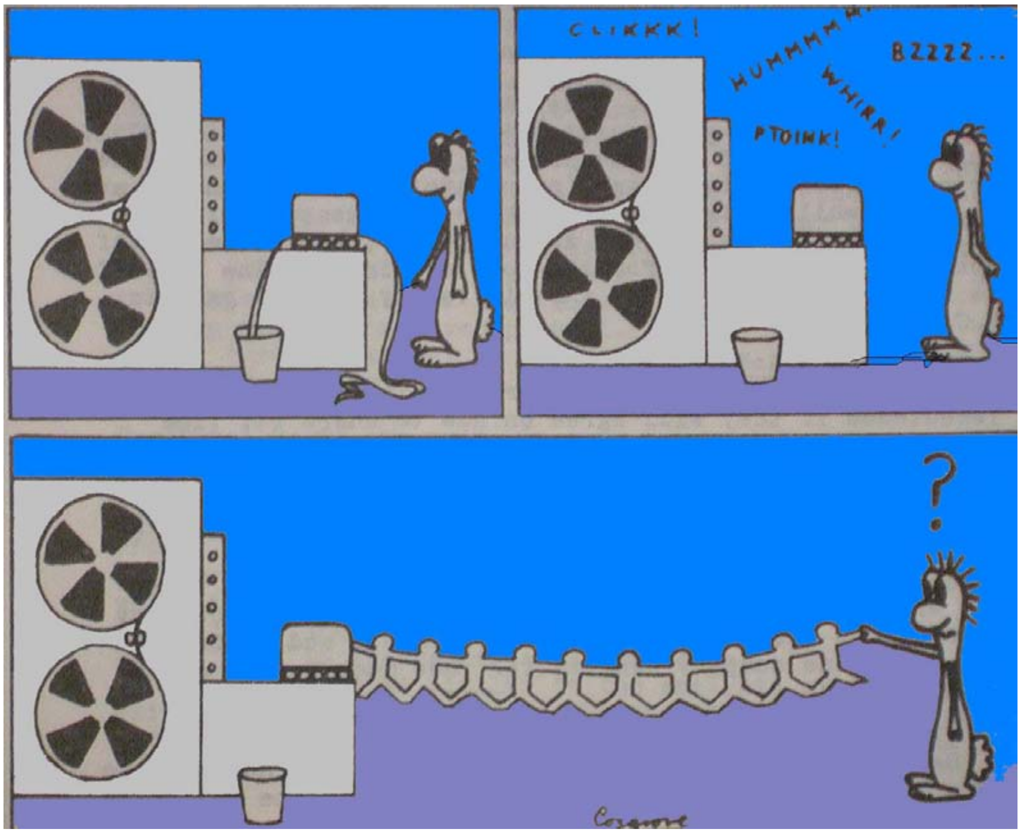
B.2 Aufgabe. Ermitteln Sie $u(f)$ für die durch folgendes Bild angedeutete Immersion.



Literatur

1. H. Whitney: On regular closed curves in the plane. Compositio Math. 4(1937), 276-284.

2. T. tom Dieck: Topologie, S. 130 ff., de Gruyter Lehrbuch, 1991.


CLIKKK!
WHIRR!
PTOINK!
BZZZZ...
?