Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 8 — E. Vogt/M. Ullmann

SS 2011 — Abgabe: 14.6.2011, 10 Uhr

Aufgabe 32

Sei R ein kommutativer Ring. Seien C, D Kettenkomplexe von R-Moduln und seien M, N R-Moduln. Sei $\mathrm{Hom}(C, M)$ der Kokettenkomplex mit n-ter Kokettengruppe $\mathrm{Hom}(C, M)_n = \mathrm{Hom}_R(C_n, M)$ und Randabbildung

$$\delta^{n+1}\colon \mathrm{Hom}(C, M)_n \to \mathrm{Hom}(C, M)_{n+1}, \qquad \delta^{n+1}(f) = (-1)^{n+1} f \circ \partial_{n+1}$$

Sei $C \otimes D$ das Tensorprodukt der Kettenkomplexe.

Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathrm{Hom}(C, M) \otimes \mathrm{Hom}(D, N) &\to \mathrm{Hom}(C \otimes D, M \otimes N) \\ f \otimes g &\mapsto \big((c \otimes d) \mapsto (-1)^{|g||x|} f(c) \otimes g(d)\big) \end{aligned}$$

ist eine Abbildung von Kettenkomplexen.

Aufgabe 33

Beweisen Sie die Eigenschaft (vi) des Kreuzproduktes (Dualität). Zeigen Sie also:

$$(\xi \times \eta)(x \times y) = (-1)^{|\eta|\cdot|x|} \xi(x) \otimes \eta(y)$$

Aufgabe 34

Sei X ein CW-Komplex und SX die unreduzierte Einhängung von X. Zeigen Sie, dass für $i, k \neq 0$ jedes cup-Produkt $H_i(SX) \times H_k(SX) \xrightarrow{\cup} H_{i+k}(SX)$ null ist. (Hinweis: Benutzen Sie das relative cup-Produkt.)

Aufgabe 35

Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. In Aufgabe 31 wurde zu einem Weg w von x nach y in M und einer Wahl einer lokalen Orientierung $H_n(M, M \smallsetminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ an x eine lokale Orientierung an y konstruiert. Zeigen Sie:

(i) Die dort angegebene Konstruktion ist kompatibel mit Komposition von Wegen.

(ii) Homotope Wege von x nach y geben dieselbe lokale Orientierung an y.