Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 7 — E. Vogt/M. Ullmann

SS 2011 — Abgabe: 7.6.2011, 10 Uhr

Aufgabe 28
Sei R ein Hauptidealring und sei C_* ein Kettenkomplex von freien R-Moduln, dessen Homologie endlich erzeugt ist. (Also insbesondere sind nur endlich viele Homologiegruppen nicht null.) Zeigen Sie, dass ein freier, endlicher erzeugter Kettenkomplex D_* existiert, so dass C_* und D_* homotopieäquivalent sind.

Aufgabe 29
Sei M ein Möbiusband und $S^1 \to M$ sein Rand. Sei X die Verklebung von M entlang seines Randes mit sich selbst, also $X = M \cup_{S^1} M$. Zeigen Sie: X ist eine geschlossene Fläche.

Bestimmen Sie die Fläche X, indem Sie die Homologie von X berechnen.

Aufgabe 30 (Alexander-Whitney-Abbildung)
Sei $\mathrm{AW}_{(X,Y)}\colon C(X \times Y) \to C(X) \otimes C(Y)$ die Abbildung, die ein Simplex $\sigma\colon \Delta^n \to X \times Y$ auf das Element

$$\sum_{i=0}^{n} (\pi_X \circ \sigma[0, 1, \dots, i]) \otimes (\pi_Y \circ \sigma[i, \dots, n])$$

abbildet. Zeigen Sie:

(i) AW ist eine Abbildung von Kettenkomplexen.

(ii) AW ist natürlich in X und Y.

(iii) Für $X = Y = \Delta^0$ induziert $\mathrm{AW}_{(X,Y)}$ die Identität auf $H_0(\Delta^0)$.

Aufgabe 31 (Orientierungslos?)
Sei M eine topologische n-Mannigfaltigkeit. Ein *lokale Orientierung* von M an $x \in M$ ist die Wahl eines Isomorphismus $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$.

Zeigen Sie: Ein Weg $w\colon [0, 1] \to M$ von x nach y in M induziert eine Abbildung $\mathbb{Z} \cong H_n(M, M \setminus \{x\}) \to H_n(M, M \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $U \subset M$ offen mit $U \cong \mathring{D}^n$ gilt, dass die Inklusion einen Isomorphismus $H_n(M, M \setminus U) \to H_n(M, M \setminus \{x\})$ induziert.)

Zeigen Sie, dass es einen geschlossenen Weg in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ gibt, der nicht die Identität $\mathbb{Z} \cong H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \{x\}) \to H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ induziert.