Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 6 — E. Vogt/M. Ullmann

SS 2011 — Abgabe: 31.5.2011, 10 Uhr

Aufgabe 24

Seien A, B, C abelsche Gruppen. Zeigen Sie

$$\mathrm{Tor}(A, \mathrm{Tor}(B, C)) \cong \mathrm{Tor}(\mathrm{Tor}(A, B), C).$$

(Hinweis: Wählen Sie freie Auflösungen $F_1 \to F_0 \to A$ und $G_1 \to G_0 \to C$ und betrachten Sie das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} F_1 \otimes B \otimes G_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes B \otimes G_1 \arrow[d] \\ F_1 \otimes B \otimes G_0 \arrow[r] & F_0 \otimes B \otimes G_0 \end{tikzcd}$$

und die Kerne der Abbildungen. Benutzen Sie die Assoziativität des Tensorproduktes und dass Sie $\mathrm{Tor}(B, C)$ auch über eine Auflösung von C berechnen können, sowie dass Tensorieren mit freien abelschen Gruppen exakt ist.)

Aufgabe 25

Sei X ein endlicher CW-Komplex. Sei K ein Körper. Definiere die Euler-Charakteristik von X abhängig von K als $\chi_K(X) := \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_K H_i(X; K)$. Zeigen Sie mit Hilfe des universelle Koeffizienten-Theorems, dass $\chi_K(X)$ unabhängig von K ist. (Hinweis: Vergleichen Sie erst die Koeffizienten Primkörper und $\mathbb{Z}$.)

Aufgabe 26

Seien X, Y zwei endliche CW-Komplexe. Zeigen Sie $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$, wobei χ die Euler-Charakteristik bezeichnet.

Aufgabe 27

Eine (topologische) Mannigfaltigkeit der Dimension n ist ein topologischer Hausdorffraum M, so dass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.

Berechnen Sie $H_i(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $x \in M$.