Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 5 — E. Vogt/M. Ullmann

SS 2011 — Abgabe: 24.5.2011, 10 Uhr

Aufgabe 20

Folgern Sie aus der Künneth-Formel für Kettenkomplexe den Satz über universelle Koeffizienten.

Aufgabe 21

Sei $\mathbb{R}P^2$ der reell projektive Raum der Dimension 2. Er hat eine CW-Struktur mit je einer 0, 1 und 2-Zelle. Kollabieren des 1-Skelettes gibt eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}P^2 \to S^2$. Zeigen Sie: f ist nicht nullhomotop.

(Hinweis: Betrachten Sie $f_*\colon H_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/2) \to H_2(S^2;\mathbb{Z}/2)$.)

Aufgabe 22

Sei A eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass aus $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ folgt, dass jedes Element in A Torsion ist. ($\forall a \in A\ \exists n : n \cdot a = 0$.)

Aufgabe 23

Zeigen Sie die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ zweier abelscher Gruppen A und B. Das bedeutet: Sei eine $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung $b\colon A \times B \to T$ gegeben, dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $c\colon A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to T$, so dass $c \circ i_A = b$, wobei i_A die Abbildung $A \times B \to A \otimes_{\mathbb{Z}} B$, $(a,b) \mapsto a \otimes b$ aus Aufgabe 15 ist.

Hinweis: Betrachten Sie das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F_1 \times B \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[d] \arrow[dddr, dashed] & \\
F_0 \times B \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[d] \arrow[ddr, dashed] & \\
A \times B \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "b"'] & A \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[dr, dashed] & \\
 & & T
\end{tikzcd}$$

wobei $F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} A$ eine freie Auflösung von A ist. Definieren Sie die gestrichelten Pfeile, zeigen Sie, dass diese eindeutig sind und zeigen Sie die Kommutativität des Diagrammes. Benutzen Sie Aufgabe 10.

Folgern Sie aus der universellen Eigenschaft, dass $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ isomorph zu $B \otimes_{\mathbb{Z}} A$ ist.