Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 4 — E. Vogt/M. Ullmann
SS 2011 — Abgabe: 17.5.2011, 10 Uhr

Aufgabe 16
Berechnen Sie:

$$\mathbb{Z}/m \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \qquad\qquad \mathbb{Z}/m *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

(Erinnerung: $A *_{\mathbb{Z}} B$ ist eine andere Notation für $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A, B)$.)

Aufgabe 17
Zeigen Sie, dass die kurze exakte Sequenz des universellen Koeffizienten-Theorems für Homologie nicht natürlich spaltet.

(Erinnerung an die Vorlesung: Das universelle Koeffizienten-Theorem sagt, dass es für einen Kettenkomplex C_* von freien R-Moduln und einen R-Modul N für jedes n eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to H_n(C_*) \otimes_R N \to H_n(C_* \otimes_R N) \to \mathrm{Tor}^R(H_{n-1}(C_*), N) \to 0$$

gibt, die spaltet. Wäre die Spaltung natürlich, so würde für jede Abbildung von Kettenkomplexen $C_* \to D_*$ die induzierte Abbildung

$$H_n(C_* \otimes_R N) \to H_n(D_* \otimes_R N)$$

die Spaltung respektieren, dh. es wäre die direkte Summe der Abbildungen von den äußeren Termen.)

Aufgabe 18 (Homotopie von Kettenkomplexen)
Sei I der Kettenkomplex von abelschen Gruppen mit der Gruppe $\mathbb{Z}$ in Grad 1 und der Gruppe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ in Grad null, sowie der Randabbildung, die den Erzeuger in Grad 1 auf die Differenz $v_0 - v_1$ der Erzeuger in Grad 0 abbildet.

Seien C, D zwei beliebige Kettenkomplexe, sei $C \otimes I$ das in der Vorlesung definierte Tensorprodukt der Kettenkomplexe. Zeigen Sie: eine Abbildung $f \colon C \otimes I \to D$ ist das gleiche wie eine Homotopie von Abbildungen $f_i \colon C \to D$, $i = 0, 1$.

Aufgabe 19
Finden Sie eine nichttriviale abelsche Gruppe G mit $G \otimes_{\mathbb{Z}} G = 0$.