Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 3 E. Vogt/M. Ullmann
SS 2011 Abgabe: 10.5.11, 10 Uhr

Aufgabe 12
Berechnen Sie:

$$\mathbb{Z}/m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n \qquad\qquad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m.$$

Aufgabe 13
Berechnen Sie $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Aufgabe 14
Zeigen Sie: die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind als $\mathbb{Z}$-Modul torsionsfrei, aber nicht frei. Ist $\mathbb{Q}$ endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$-Modul?

Aufgabe 15
Seien M, N abelsche Gruppen und betrachte das Tensorprodukt $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$. Seien $m \in M, n \in N$. Wir konstruieren ein Element „$m \otimes n$" in $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ wie folgt.

Wähle eine freie Auflösung $F_1 \to F_0 \xrightarrow{p} M$ von M und ein Element $x \in F_0$ mit $p(x) = m$. Dann gilt $x = \sum_{i \in B_0} r_i b_i$, wobei $\{b_i\}_{i \in B_0}$ die gewählte Basis von F_0 ist und nur endliche viele r_i ungleich null sind. Definiere das Element $f = x \otimes n$ in $F_0 \otimes N = \bigoplus_{i \in B_0} N$ als $(r_i n)_{i \in B_0}$, bzw. $f(i) = r_i n$, $i \in B_0$.

Dann definiere $m \otimes n := [f] \in H_0(F_* \otimes_{\mathbb{Z}} N) = M \otimes_{\mathbb{Z}} N$. In der Vorlesung sehen Sie, dass $m \otimes n$ nicht von den getroffenen Wahlen abhängt.

Geben Sie abelsche Gruppen M, N und ein Element in $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ an, welches nicht von der Form $m \otimes n$ ist.

(Damit zeigen Sie, dass die (bilineare) Abbildung $i\colon M \times N \to M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$ im Allgemeinen nicht surjektiv ist.)

Hinweis: $\mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2$.