Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 2 — E. Vogt/M. Ullmann

SS 2011 — Abgabe: 29.4.2011

Aufgabe 8 (Tensorprodukt vertauscht mit direkten Summen)
Sei A eine abelsche Gruppe, sei I eine Menge und gebe es für jedes $i \in I$ eine abelsche Gruppe B_i. Sei $\bigoplus_{i\in I} B_i$ die direkte Summe der B_i. Zeigen Sie: $\big(\bigoplus_{i\in I} B_i\big) \otimes A$ ist isomorph zu $\bigoplus_{i\in I} \big(B_i \otimes A\big)$.

Aufgabe 9 (Universelle Eigenschaft des Produktes)
Seien X, Y topologische Räume. Erinneren Sie sich an die Definition des Produktes $X \times Y$, insbesondere an die Topologie darauf. Seien $p_X\colon X \times Y \to X$ und $p_Y\colon X \times Y \to Y$ die Projektionen. Zeigen Sie:

(i) Zu jeder stetigen Abbildung $f\colon T \to X \times Y$ gibt genau eine stetige Abbildung $f_X\colon T \to X$ mit $f_X = p_X \circ f$ und genau eine stetige Abbildung $f_Y\colon T \to Y$ mit $f_Y = p_Y \circ f$.

(ii) Zu je zwei stetigen Abbildungen $f_X\colon T \to X$ und $f_Y\colon T \to Y$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f\colon T \to X \times Y$ mit $f_X = p_X \circ f$, $f_Y = p_Y \circ f$.

(Hinweis: wichtig ist natürlich die Stetigkeit der jeweiligen Abbildungen nachzuweisen. Benutzen Sie dazu die Definition der Produkttopologie.)

Aufgabe 10 (Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes)
Sei F eine freie abelsche Gruppe und N eine beliebige abelsche Gruppe. Zeigen Sie: die Abbildung $i\colon F \times N \to F \otimes N$, $(f, n) \mapsto (f \otimes n)$ ist bilinear.

Zeigen Sie weiterhin: Zu jeder bilinearen Abbildung $b\colon F \times N \to Q$ in eine abelsche Gruppe Q gibt es genau eine lineare Abbildung $B\colon F \otimes N \to Q$ mit $B \circ i = b$.

Aufgabe 11
Seien A und B abelsche Gruppen. Definiere $A \boxtimes B$ als die abelsche Gruppe mit Erzeugern „$a \boxtimes b$“ für $a \in A, b \in B$ und Relationen $(a+a')\boxtimes b = (a\boxtimes b)+(a'\boxtimes b)$ und $a \boxtimes (b+b') = (a \boxtimes b) + (a \boxtimes b')$. Zeigen Sie, $A \boxtimes B$ ist isomorph zu $A \otimes B$.