Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 1 — E. Vogt/M. Ullmann

SS 2011 — Abgabe: 29.4.2011

Aufgabe 1

Sei $\overline{k}\colon S^1 \to S^1$ die Abbildung vom Grad $k \in \mathbb{Z}$. Sei X der topologische Raum der aus S^1 durch Ankleben einer 2-Zelle entlang $\overline{k}$ entsteht.

(i) Berechnen Sie die Homologie von X mittels des zellulären Kettenkomplexes von X.

(ii) Finden Sie einen Δ-Komplex mit unterliegendem topologischen Raum X und berechnen Sie damit erneut die Homologie von X.

(iii) Benutzen Sie den Satz von Mayer-Vietoris um die Homologie von X ein drittes Mal zu berechnen. Nehmen die dabei als Überdeckungsmengen einmal das Innere der 2-Zelle sowie das Komplement des Mittelpunktes der 2-Zelle.

Aufgabe 2

(i) Finden Sie einen Δ-Komplex mit unterliegendem Raum die 2-Sphäre S^2. Bestimmen Sie damit das cup-Produkt auf der Kohomologie von S^2 mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

(ii) Finden Sie einen Δ-Komplex mit unterliegendem Raum die Kleinsche Flasche K. Bestimmen Sie damit das cup-Produkt auf der Kohomologie von K mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Kohomologiegruppen mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten der Kleinschen Flasche und das cup-Produkt darauf.

Aufgabe 4

Sei X ein topologischer Raum und sei die abelsche Gruppe $H_k(X;\mathbb{Z})$ endlich erzeugt. Betrachte den Quotienten von $H_k(X;\mathbb{Z})$ nach ihrer Torsionsuntergruppe $\operatorname{Tor} H_k(X;\mathbb{Z})$. Dann ist $H_k(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Tor} H_k(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^l$. Zeigen Sie: $H_k(X;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^l$.