9. Produkte 2

Aus dem Kohomologiekreuzprodukt

$$H^p(X,A;R) \otimes H^q(Y,B;N) \xrightarrow{-\times-} H^{p+q}((X,A)\times(Y,B);N)$$

wird für $Y=X$ und $\{A,B\}$ exzisiv in X unter Vorschalten der Diagonale $X \xrightarrow{\Delta} X\times X$ das Cup-Produkt.

genauer: $C(X) \xrightarrow{C(\Delta)} C(X\times X) \xrightarrow{AW} C(X)\otimes C(X)$

bildet $C\{A,B\}$ in $C(A)\otimes C(X) + C(X)\otimes C(B)$ wegen Natürlichkeit ab. Das ist der Kern von

$$C(X)\otimes C(X) \longrightarrow \frac{C(X)}{C(A)} \otimes \frac{C(X)}{C(B)}$$

so dass wir insgesamt eine Kettenabbildung

$$D : \frac{C(X)}{C\{A,B\}} \longrightarrow \frac{C(X)}{C(A)} \otimes \frac{C(X)}{C(B)}$$ erhalten.

Dualisieren ergibt und Vorschalten von α

$$\mathrm{Hom}\left(\frac{C(X)}{C(A)}, R\right) \otimes \mathrm{Hom}\left(\frac{C(X)}{C(B)}, N\right) \xrightarrow{\alpha}$$

$$\mathrm{Hom}\left(\frac{C(X)}{C(A)} \otimes \frac{C(X)}{C(B)}, \underbrace{R\otimes N}_{=N}\right) \xrightarrow{-\circ D}$$

$$\mathrm{Hom}\left(\frac{C(X)}{C\{A,B\}}, N\right) \underset{j}{\xleftarrow{\cong}} \mathrm{Hom}\left(\frac{C(X)}{C(A\cup B)}, N\right)$$
Exzision

in Kohomologie das Cup-Produkt

$$H^p(X,A;R) \otimes H^q(X,B;N) \xrightarrow{-\cup-} H^{p+q}(X, A\cup B; N)$$

Für $N=R$ erhalten wir, wenn wir unsere spezielle Alexander-Whitneyabbildung einsetzen, genau das Cup-Produkt aus Topologie 2.

Die Eigenschaften des Kohomologiekreuzprodukts übertragen sich unmittelbar:

(i) Natürlichkeit in Kurzform:

$$f^*(x\cup y) = f^*(x)\cup f^*(y)$$

(ii) Kommutativ $\quad x\cup y = (-1)^{|x||y|}\, y\cup x$

(iii) Assoziativ

(iv) 1-Element

$$1_X\cup x = x\cup 1_X = x \quad \text{, wobei}$$

$$1_X\in H^0(X;R) = pr^*(1),$$

$1\in H^0(P;R)$, $pr: X\to P$ die kan. Abb. ist; P ein einpunktiger Raum

(v) Stabilität (Koeff. sind in der Notation unterdrückt)

$$\begin{tikzcd}
H^i(A)\otimes H^j(X,B) \arrow[r, "id\otimes i^*"] \arrow[dd, "\delta\otimes id"'] & H^i(A)\otimes H^j(A,A\cap B) \arrow[r, "-\cup-"] & H^{i+j}(A,A\cap B) \\
 & & H^{i+j}(A\cup B,B) \arrow[u, "exc\ \cong"] \arrow[d, "\delta"] \\
H^{i+1}(X,A)\otimes H^j(X,B) \arrow[rr, "-\cup-"] & & H^{i+j+1}(X,A\cup B)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

(vi) Verbindung mit dem Kreuzprodukt

$\{A, B\}$ exzisiv in X und $\{A \times X, X \times B\}$ exzisiv in $X \times X$.

(a) Dann ist für $\alpha \in H^i(X, A)$, $\beta \in H^j(X, B)$

$\alpha \times \beta \in H^{i+j}(X \times X, A \times X \cup X \times B)$ und

$\alpha \cup \beta \in H^{i+j}(X, A \cup B)$ definiert.

Weiter haben wir die Diagonalabbildung

$$\Delta : (X, A \cup B) \longrightarrow (X \times X, A \times X \cup X \times B)$$

Dann gilt

$$\alpha \cup \beta = \Delta^*(\alpha \times \beta).$$

Dies sieht man unmittelbar aus den Definitionen unter Betrachten repräsentierender Kozykel

(b) Sei $\{A \times Y, X \times B\}$ in $X \times Y$ exzisiv.

$\pi_X : X \times Y \to X$, $\pi_Y : X \times Y \to Y$ die Projektionen, $\alpha \in H^i(X, A)$, $\beta \in H^j(Y, B)$

Wir haben

$\alpha \times \beta \in H^{i+j}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ und

$\pi_X^*(\alpha) \in H^i(X \times Y, A \times Y)$, $\pi_Y^*(\beta) \in H^j(X \times Y, X \times B)$

und können $\pi_X^*(\alpha) \cup \pi_Y^*(\beta) \in H^{i+j}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ bilden. Dann sind

$$\alpha \times \beta = \pi_X^*(\alpha) \cup \pi_Y^*(\beta)$$

Da die relativen Teile in den Abbildungen auf beiden Seiten sich entsprechen und alles natürlich ist, schauen wir uns nur die Wirkungen repräsentierender Kozykel auf sing. $(i+j)$-Simplizes an.

Sei also $f: \frac{C(X)}{C(A)} \longrightarrow R, \quad g: \frac{C(Y)}{C(B)} \longrightarrow N$

repräsentierende Kozykel (aufgefasst als Homom. $C(X) \to R$, $C(Y) \to N$. Dann wird die ~~rechte~~ linke Seite repräsentiert von ~~einer~~ Kokette, die

$$\sigma : \Delta^{i+j} \longrightarrow X \times Y \quad \text{abbildet auf}$$

$$(-1)^{ij} \; f\left(\pi_X \circ \sigma(0,\dots,i)\right) \cdot g\left(\pi_Y \circ \sigma(i,\dots,i+j)\right)$$

Die rechte bedarf einer etwas längeren Schreibarbeit

$$(-1)^{ij} \quad f \circ C(\pi_X) \left(C(\pi^1_{X\times Y}) \circ C(\Delta_{X\times Y}) \left(\sigma(0,\dots,i)\right)\right)$$

$$\cdot \; g \circ C(\pi_Y) \left(C(\pi^2_{X\times Y}) \circ C(\Delta_{X\times Y}) \left(\sigma(i,\dots,i+j)\right)\right)$$

wobei $\pi^1_{X\times Y} : X\times Y \times X \times Y \to X \times Y$ auf das erste Prod. $\pi^2_{X\times Y}$ auf das zweite abbildet. Also ist die rechte Seite gleich

$$(-1)^{ij} \; f\left(\pi_X \circ \underbrace{\pi^1_{X\times Y} \circ \Delta_{X\times Y}}_{\mathrm{id}_{X\times Y}} \circ \sigma(0,\dots,i)\right) \cdot$$

$\longrightarrow$

$$g(\pi_Y \circ \mathrm{id}_{X\times Y} \circ \sigma(i,\dots,i+j))$$

$$= (-1)^{ij} f(\pi_X \circ \sigma(0,\dots,i))\, g(\pi_Y \circ \sigma(i,\dots,i+j)).$$

(VII) Folgerung aus VI (b)

$x_i \in H^{p_i}(X, A_i; R)$, $y_i \in H^{q_i}(Y, B_i; R)$, $i = 1, 2$

und alle notwendigen Exzisivitätsannahmen vorausgesetzt. Dann gilt

$H^{p_1+p_2+q_1+q_2}((X, A_1 \cup A_2) \times (Y, B_1 \cup B_2))$ die Gln.

$$(x_1 \times y_1) \cup (x_2 \times y_2) = (-1)^{q_1 p_2} (x_1 \cup x_2) \times (y_1 \cup y_2)$$

Bew. Linke Seite =

$$\pi_X^* x_1 \cup \pi_Y^* y_1 \cup \pi_X^* x_2 \cup \pi_Y^* y_2 =$$

$$(-1)^{q_1 p_1} \pi_X^* x_1 \cup \pi_X^* x_2 \cup \pi_Y^* y_1 \cup \pi_Y^* y_2 =$$

$$(-1)^{q_1 p_1} \pi_X^* (x_1 \cup x_2) \cup \pi_Y^* (y_1 \cup y_2) =$$

$$(-1)^{q_1 p_1} (x_1 \cup x_2) \times (y_1 \cup y_2).$$

$\square$

9.2 Ringstruktur auf $H^*(X,A;R)$

Spezialisieren wir auf $N = R$, $B = A$, so erhalten wir mit dem Cup-Produkt einen Homom.

$$H^*(X,A;R) \otimes H^*(X,A;R) \xrightarrow{\ \cup\ } H^*(X,A;R)$$

Dies macht $H^*(X,A;R)$ zu einer gradierten, kommutativen R-Algebra in folgendem Sinne.

9.2.(a) Definition: Eine gradierte R-Algebra ist ein Gradierter R-Modul A zusammen mit einem (graderhaltenden) R-Homomorphismus

$$A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

so dass gilt:

Assoziativ:

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes A & \xrightarrow{\mu\otimes id} & A\otimes A \\ {\scriptstyle id\otimes\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ A\otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

kommutiert.

Gibt es einen Homom. $\nu : R \longrightarrow A$ mit

$$A = R\otimes A \xrightarrow{\nu\otimes id} A\otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

$$A = A\otimes R \xrightarrow{id\otimes\nu} A\otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

jeweils gleich id_A, so heißt ν ein 1-Elt. von A und wir sagen, dass (A, μ) eine R-Algebra mit 1 ist (beachte, dass hier R kommutativ mit 1 vorausgesetzt wird)

(A, μ) heißt <u>kommutativ</u>, falls

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ & A \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ die Vertauschungsabb. ist:

ist $a \in A^i$, $a' \in A^j$ so ist
$\tau(a \otimes a') = (-1)^{i \cdot j} a' \otimes a$.

9.3 Ringstruktur auf $H^*((X,A) \times (Y,B); R)$

Sind $H^i(X,A;R)$, $H^i(Y,B;R)$ für alle i endlich erzeugt und ist

$$H^i(X,A;R) * H^j(Y,B;R) = 0$$

für alle i, j, so können wir die Algebrastruktur von $H^*((X,A) \times (Y,B); R)$ direkt aus der von $H^*(X,A;R)$ und $H^*(Y,B;R)$ gewinnen

Denn das Künneth theorem für Kohomologie liefert einen Isomorphismus via Kreuzprodukt

$$H^*(X,A;R) \otimes H^*(Y,B;R) \xrightarrow[\cong]{-\times-} H^*((X,A)\times(Y,B);R)$$

und mit (VII) sehen wir, wie die Produkte auf der rechten Seite gebildet werden.

Erzeugt wird die rechte Seite als graduierter R-Modul von Elementen der Form $\alpha \times \beta$

und $(\alpha\times\beta) \cup (\alpha'\times\beta') = (-1)^{|\beta||\alpha'|} (\alpha\cup\alpha')\times(\beta\cup\beta')$.

Auch dazu gibt es Notation:

9.3. a Definition. (A,μ), (A',μ') seien graduierte R-Algebren. Dann wird $A\otimes A'$ mit der Multiplikation

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A'\otimes A\otimes A' & \xrightarrow{id\otimes\tau\otimes id} & A\otimes A\otimes A'\otimes A' \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mu\otimes\mu'} \\ & & A\otimes A' \end{array}$$

wieder zu einer grad. R-Algebra. Haben A, A' eine Eins, so auch $A\otimes A'$, nämlich

$$R = R\otimes R \xrightarrow{\nu\otimes\nu'} A\otimes A'$$

Ebenso ist $A \otimes A'$ kommutativ, falls A und A' kommutativ sind.