8. Produkte

Im Prinzip beruhen auf algebraischer Seite alle Produkte auf dem Tensorprodukt, für Kohomologie in Verbindung mit der Kettenabbildung

$$\mathrm{Hom}(C,M)\otimes \mathrm{Hom}(D,N) \xrightarrow{\mu} \mathrm{Hom}(C\otimes D, M\otimes N)$$

Hier sind C, D freie R-Kettenkomplexe und M, N R-Moduln. $\mathrm{Hom}(C,M)$ ist in unserer früheren Notation der Kokettenkomplex $C^*(M)$, also

$$\mathrm{Hom}^n(C,M) = \mathrm{Hom}(C_n, M)$$

$$\delta^{n+1} : \mathrm{Hom}^n(C,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{n+1}(C,M)$$

gegeben durch $\delta^{n+1} f = (-1)^{n+1} f \circ \partial_{n+1}$,

$f : C_n \longrightarrow M$. Mit unseren Definitionen für Tensorprodukte von (Ko)-Kettenkomplexen ist μ eine Kettenabbildung und induziert somit eine Abbildung in Kohomologie

$$H^n(\mathrm{Hom}(C,M)\otimes \mathrm{Hom}(D,N)) \longrightarrow H^n(C\otimes D; M\otimes N)$$

Ist $[f] \in H^i(C;M)$, $[g] \in H^{n-i}(D;N))$, so

ist $f \otimes g$ ein Kozykel von $\mathrm{Hom}(C,M) \otimes \mathrm{Hom}(D,N)$,

und $[f \otimes g]$ hängt nur von $[f]$ und $[g]$ ab. Wir erhalten somit insgesamt einen R-Homom.

$$\left(H^*(C;M) \otimes H^*(D;N)\right)^n \longrightarrow H^n(C \otimes D; M \otimes N),$$

den wir wieder mit μ (μ = Multiplikation) bezeichnen.

Auf Homologieniveau haben wir

$$\left(H_*(C;M) \otimes H_*(D;N)\right)_n \longrightarrow H_n(C \otimes D; M \otimes N)$$

Nehmen wir für C $\quad C(X,A)$, für D $C(Y,B)$ mit $\{A \times Y, X \times B\}$ exzisiv in $X \times Y$ so erhalten wir mit Hilfe von Eilenberg-Zilber-Äquivalenzen (zur Vereinfachung sei $M = R$; dann unterdrücken wir, wie üblich den Koeff.)

$$\left(H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B;N)\right)^n \xrightarrow{- \times -} H^n((X,A)\times(Y,B);N)$$

und

$$\left(H_*(X,A) \otimes H^*(Y,B;N)\right)_n \xrightarrow{- \times -} H_n((X,A)\times(Y,B);N)$$

Diese beiden Abbildungen heißen

Äußeres Kohomologie- bzw. Homologieprodukt
oder auch
Kohomologiekreuzprodukt, bzw. Homologiekreuzprodukt.

Zur Vorsicht noch einmal die in μ auftretenden Vorzeichen für

$$\mathrm{Hom}(C,M)\otimes\mathrm{Hom}(D,N)\longrightarrow\mathrm{Hom}(C\otimes D, M\otimes N)$$

$$\mu(f\otimes g)(c\otimes d)=(-1)^{|c|\cdot|g|}f(c)\otimes g(d)$$

Hier bedeutet $|\ |$ der Grad eines Elements; also $|f|=n$, falls $f: C_n\to M$ (Eigentlich ist hier $|f|=-n$; das ändert aber nicht das Vorzeichen)

Analog zu den Eigenschaften der Eilenberg-Zilber Abbildungen haben die beiden Kreuzprodukte genauso wie die später definierten Cup-, Slant- und Cap-Produkte eine Reihe angenehmer Eigenschaften. Wir formulieren sie nur für das Kohomologiekreuzprodukt, da es häufiger in Anwendungen benutzt wird.

8.2 Eigenschaften des Kohom.-Kreuzprodukts

(i) Natürlichkeit $f : (X,A) \longrightarrow (X',A')$, $g : (Y,B) \to (Y',B')$ stetig, dann gilt für $\xi \in H^*(X',A')$, $\eta \in H^*(Y',B';N)$

$$(f \times g)^*(\xi \times \eta) = f^*(\xi) \times g^*(\eta)$$

(ii) Kommutativ. $\xi \in H^n(X,A)$, $\eta \in H^m(Y,B)$

$t : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ die Vertauschungsabb. Dann

ist $$t^*(\eta \times \xi) = (-1)^{n \cdot m} \xi \times \eta$$

(iii) Assoziativ (Formulierung sollte klar sein)

(iv) 1-Element

(a) Ist P ein 1-pkt. Raum und $1_P \in H^0(P;R)$ das Elt., das von $C_0(P) \to R$, $c_p : \Delta^0 \to P$
$c_p \longmapsto 1$
repräsentiert wird, so ist

$1_P \times \xi = \xi = \xi \times 1_P$ wobei

$P \times (X,A) = (X,A) = (X,A) \times P$ gedacht wird.

(b) Ist $\pi : Y \longrightarrow P$ die kan. Abb. und

$1_Y = \pi^*(1_P) \in H^0(Y;R)$, so gilt

$$\xi \times 1_Y = (\mathrm{id} \times \pi)^*(x \times 1_P) = p^*(x),$$

wobei $p : (X,A) \times Y \longrightarrow (X,A) \times P = (X,A)$ die Projektion ist.

(V) Stabilität (Verträglichkeit mit der Randabb.)

Das folgende Diagramm kommutiert (Koeff. in Notation weggelassen)

$$\begin{tikzcd} H^k(A)\otimes H^l(Y,B) \arrow[r, "-\times-"] \arrow[d, "\delta\otimes id"'] & H^{k+l}(A\times Y, A\times B) & H^{k+l}\left(\begin{smallmatrix} A\times Y \\ \cup \\ X\times B\end{smallmatrix}\right) \arrow[l, "\cong"', "exc"] \arrow[d, "\delta"] \\ H^{k+1}(X,A)\otimes H^l(Y,B) \arrow[rr, "-\times-"] & & H^{k+l+1}((X,A)\times(Y,B)) \end{tikzcd}$$

(VI) Dualität: Wenn

$$\begin{array}{ccccc} H^k(X,A;M) & \otimes & H_k(X,A) & \longrightarrow & M \quad \text{die Auswertung} \\ \xi & \otimes & x & \longmapsto & \xi(x) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ [f] & \otimes & [c] & \longmapsto & f(c) \end{array}$$

ist, so gilt

$$(\xi\times\eta)(x\times y) = (-1)^{|\eta|\cdot|x|}\,\xi(x)\otimes\eta(y) .$$

↑ Homologiekreuzprodukt

Wir beweisen nur (V). Die anderen folgen unmittelbar.

Sei $f: C_k(A)\longrightarrow R$ ein Repräsentant für $\varphi\in H^k(A)$

$g: \dfrac{C_l(Y)}{C_l(B)} \longrightarrow M$ ein Repräsentant für $\eta\in H^l(Y,B;M)$

Erweitere f auf ganz $C_k(X)$ (z.B. durch 0 auf allen anderen sing. k-Simplizes.

Gehen wir oben herum um das Quadrat in (V), so haben wir

$$\delta(\mu(f\otimes g)\circ EZ)$$ als Repräsentant des Elements rechts unten

Dies ist gleich $(-1)^{|f|+|g|+1}\mu(f\otimes g)\circ EZ\circ\partial$

$$= (-1)^{|f|+|g|+1}\mu(f\otimes g)\circ\partial\circ EZ$$

$$= (-1)^{|f|+|g|+1}\Big((-1)^{|g|}\mu(f\circ\partial\otimes g)\circ EZ$$

$$+ \mu(f\otimes \underbrace{g\circ\partial}_{=0})\circ EZ\Big)$$

$$= (-1)^{|f|+1}\mu(f\circ\partial\otimes g)\circ EZ$$

$$= \mu((\delta f)\otimes g)\circ EZ$$

Letzter Ausdruck ist ein repräsentierendes El wenn wir unten herum gehen.

Vorsicht: Wir landen eigentlich in $C_{k+l+1}(X\times Y, \{A\times Y, X\times B\})$
Das ist aber wegen Exzisivität in Ordnung.