7. Künneth-Sätze

7.1 Wir nennen zur Vereinfachung alle natürlichen Kettenäquivalenzen

$$C(X) \otimes C(Y) \longrightarrow C(X \times Y)$$

und $\quad C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes C(Y)$,

die auf 1-pkt Räumen in Homologie die Identität induzieren Eilenberg-Zilber-Abbildungen und bezeichnen sie mit EZ (bzw. $EZ(X,Y)$, falls die Räume X, Y eine Rolle spielen)

7.2 Für beliebige Eilenb.-Zilber-Abbildungen sind die folgenden Diagramme (natürlich) homotopie-kommutativ

(a)
$$\begin{tikzcd} C(X) \otimes C(Y) \arrow[r, shift left, "EZ"] \arrow[d, "\tau"'] & C(X \times Y) \arrow[l, shift left, "EZ"] \arrow[d, "C(t)"] \\ C(Y) \otimes C(X) \arrow[r, shift left, "EZ"] & C(Y \times X) \arrow[l, shift left, "EZ"] \end{tikzcd}$$

wobei $\tau(c \otimes d) = (-1)^{|c||d|}(d \otimes c)$, $|x| = \dim x$, also $|x| = i$, falls $x \in C_i$; und $t(x,y) = (y,x)$.

(Spätestens an dieser Stelle sollten wir die goldene Vorzeichenregel ins Herz schließen)

(b)
$$\begin{tikzcd}
C(X)\otimes C(Y)\otimes C(Z) \arrow[r, shift left, "EZ\otimes id"] \arrow[d, shift right, "id\otimes EZ"'] & C(X\times Y)\otimes C(Z) \arrow[l, shift left, "EZ\otimes id"] \arrow[d, shift left, "EZ"] \\
C(X)\otimes C(Y\times Z) \arrow[r, shift left, "EZ"] \arrow[u, shift right, "id\otimes EZ"'] & C(X\times Y\times Z) \arrow[l, shift left, "EZ"] \arrow[u, shift left, "EZ"]
\end{tikzcd}$$

(c)
$$\begin{tikzcd}
C(X)\otimes C(*) \arrow[r, shift left, "EZ"] \arrow[d, "id\otimes \eta"'] & C(X\times\{*\}) \arrow[l, shift left] \arrow[d, "C(proj)"] \\
C(X)\otimes_R R \arrow[r, shift left, "id"] & C(X) \arrow[l, shift left, "id"]
\end{tikzcd}$$

(beachte $C_n(X)$ ist der freie R-Modul über den sing. Simplizes von X)

$\eta : C(*) \longrightarrow R$ die Augmentierungsabb

$C_0(*) \longrightarrow R$

$r\cdot\sigma_0 \longmapsto r$, $\sigma_0 : \Delta^0 \longrightarrow *$ das sing. 0-Simplex von $*$

$C_i(*) \longrightarrow 0$, $i \neq 0$.

Wir beweisen exemplarisch den Teil (a) mit EZ von links nach rechts (also EM-Abbildungen).

τ ist nat. Transformation zwischen $(X,Y) \longmapsto C(X)\otimes C(Y)$ und $(X,Y) \longmapsto C(Y)\otimes C(X)$ (sogar ein natürlicher Iso.)

Ebenso ist $C(t)$ ein nat. Iso., so dass insgesamt

$EZ\circ\tau$ und $C(t)\circ EZ$ natürliche Transformationen zwischen $(X,Y) \longrightarrow C(X)\otimes C(Y)$ und

$$(X,Y) \longrightarrow C(Y\times X) \quad \text{sind.}$$

Beide Funktoren sind frei mit Modellen deren Homologiegruppen für die beiden Funktoren im Grad 0 konzentriert sind. Es bleibt also nur zu prüfen ob beide nat. Transf. in H_0 dieselbe Abbildung auf M_0 induzieren

$$\begin{tikzcd}
H_0(C(\Delta_0)\otimes C(\Delta_0)) \arrow[r, "EZ"] \arrow[d] & H_0(C(\Delta_0\times\Delta_0)) \arrow[d, "H_0(t)=id"] \\
H_0(C(\Delta_0)\otimes C(\Delta_0)) \arrow[r, "EZ"] & H_0(C(\Delta_0\times\Delta_0))
\end{tikzcd}$$

$$[\iota_0\otimes\iota_0] \xrightarrow{(-1)^{0\cdot 0}} [\iota_0\otimes\iota_0] \qquad \leadsto id = H_0(\tau)$$

beachte: $[\iota_0\otimes\iota_0]$ ist das kan. Erz. von $H_0(C(\Delta_0)\otimes C(\Delta_0)) =$

$$H_0(\Delta_0)\otimes H_0(\Delta_0) = R\otimes R$$
$$= R.$$

Die Beweise von (b) u. (c) gehen genauso.

7.3 Korollar (des Eilenberg-Zilber Satzes). (X,A), (Y,B) seien Raumpaare. Dann haben wir nat. kommutative Diagramme mit exakten Zeilen, wobei AW und EM beliebige Alex. Whitney bzw. Eilenberg-MacLane abbildungen sind.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C(A)\otimes C(Y)+C(X)\otimes C(B) \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right, "EM'"'] & C(X)\otimes C(Y) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "EM"'] & C(X,A)\otimes C(Y,B) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "EM''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C\{A\times Y, X\times B\} \arrow[r] \arrow[u, shift right, "AW'"'] & C(X\times Y) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "AW"'] & \dfrac{C(X\times Y)}{C\{A\times Y, X\times B\}} \arrow[r] \arrow[u, shift right, "AW''"'] & 0
\end{tikzcd}$$

wobei EM', AW' die Einschränkungen von EM, AW sind und somit, wegen Natürlichkeit selbst Eil.-MacLane; bzw. Alex.-Whit.-Abb sind. Somit induzieren EM, AW die Abb. auf der rechten Seite. Die untere Sequenz ist offensichtlich exakt. Für die obere beachte, dass wir nur mit freien Moduln zu tun haben und $C(A)\hookrightarrow C(X)$, $C(B)\hookrightarrow C(Y)$ durch Inklusionen von Basen beschrieben werden.

z.B. $$C_i(A)\otimes C_{n-i}(Y) + C_i(X)\otimes C_{n-i}(B)$$

trifft genau die Basiselemente $(\sigma_i^X\otimes\sigma_{n-i}^Y)$ von $C_i(X)\otimes C_{n-i}(Y)$

mit $\sigma_i^X(\Delta^i)\subset A$ oder $\sigma_{n-i}^Y(\Delta^{n-i})\subset B$. Die Basis von $C_i(X,A)\otimes C_{n-i}(Y,B)$ sind die $\sigma_i^X\otimes\sigma_{n-i}^Y$ mit

$\sigma_i^X(\Delta^i)\not\subset A$ und $\sigma_{n-i}^Y(\Delta^{n-i})\not\subset B$ □

7.4 Korollar (Künneth-Satz für Raumpaare)

Es seien (X,A), (Y,B) Raumpaare, so dass $\{X\times B, A\times Y\}$ in $X\times Y$ exzisiv sind (d.h. $C\{X\times B, A\times Y\}\hookrightarrow C(A\times Y\cup X\times B)$ ist eine Kettenhomotopieäquivalenz). Dann ex. eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \left(H(X,A) \otimes H(Y,B)\right)_n \xrightarrow{\mu} H_n(X\times Y, A\times Y \cup X\times B) \longrightarrow$$

$$\left(H(X,A) * H(Y,B)\right)_{n-1} \longrightarrow 0$$

Die Sequenz spaltet, aber nicht natürlich.

Dies folgt unmittelbar aus dem algebraischen Künneth-Satz und der Tatsache, dass die Exzisivität von $\{A\times Y, X\times B\}$ impliziert, dass die kanonische Abb

$$\frac{C(X\times Y)}{C\{A\times Y, X\times B\}} \longrightarrow \frac{C(X\times Y)}{C(A\times Y \cup X\times B)}$$

eine Kettenhomotopieäquivalenz ist, so dass wir natürliche Isomorphismen

$$H\left(C(X,A) \otimes C(Y,B)\right) \rightleftarrows H\left(X\times Y, A\times Y \cup X\times B\right)$$

haben.

Bemerkung: Wer will, darf bei $H(X,A)$ und $H(Y,B)$ Koeffizienten M und N einsetzen. Man landet dann bei (Setze $(X,A)\times(Y,B) = (X\times Y, A\times Y \cup X\times B)$)

$$0 \to \left(H(X,A;M) \otimes H(Y,B;N)\right)_n \to H_n\left((X,A)\times(Y,B); M\otimes N\right)$$

$$\to \left(H(X,A;M) * H(Y,B;N)\right)_{n-1} \to 0$$

wenn man <u>zusätzlich</u> $M * N = 0$ verlangt

7.5 Es gibt ein analoges Theorem für Kohomologie, wenn man gewisse Einschränkungen an die Homologiegruppen von (X,A) und (Y,B) macht. Wir formulieren dies ohne Beweis. Es ist auch nicht die allgemeinste Version.

Satz: C, D seien freie Kettenkomplexe über dem Hauptidealring R und M, N seien R-Moduln mit $M * N = 0$. Weiter seien $H_n(C)$ und $H_n(D)$ für alle n endlich erzeugt. Dann ex. eine natürliche ex. Sequenz

$$0 \to \left(H^*(C;M) \otimes H^*(D;N)\right)^n \xrightarrow{\mu} H^n(C \otimes D; M \otimes N) \to$$

$$\to \left(H^*(C;M) * H^*(D;N)\right)^{n-1} \to 0$$

Die Sequenz spaltet, aber nicht natürlich.

7.6 Es ist Euch überlassen, den Satz in singuläre Kohomologie zu übersetzen durch Nutzen von EZ-Kettenhomotopieäquivalenzen und Exzisivitätsannahmen.

7.7 Bemerkung zu 7.5. Die Einschränkungen an $H_n(C)$ und $H_n(D)$ kommen durch folgende

Tatsachenzustände:

<u>Lemma</u>: Es seien A, B frei und entweder A und B endlich erzeugt, oder B und N endlich erzeugt. Dann ist die natürliche Abbildung

$$\mu : \mathrm{Hom}(A, M) \otimes \mathrm{Hom}(B, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A \otimes B, M \otimes N)$$

$$\mu(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$$

ein Isomorphismus.

Beachte hierzu eine partielle Umkehrung. $(A \cong \mathrm{Hom}(R, A))$

<u>Lemma</u>: Es sei A ein R-Modul, so dass

$$\mu : \mathrm{Hom}(A, R) \otimes A \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, A)$$

$$\mu(f \otimes a)(b) = f(b) \cdot a$$

ein Epimorphismus ist, so ist A endlich erzeugt.

<u>Bew.</u> $\exists \ f_i : A \to R, \ a_i \in A, \quad i = 1, \dots, n$, so dass

$$\mu\Big(\sum_i f_i \otimes a_i\Big) = \mathrm{id}_A .$$ Also ist $\forall \ a \in A$

$$a = \sum_i f_i(a) \cdot a_i .$$ $\square$