6. Azyklische Modelle und der Satz von Eilenberg und Zilber

6.1 <u>Freie Funktoren</u> (Definition) Es sei $F : \mathcal{K} \longrightarrow R\text{-Mod}$ ein Funktor; $\mathcal{K}$ beliebige Kategorie, R-Mod die Kategorie der R-Moduln. Eine <u>Basis von F</u> ist eine Familie

$a_i \in F(M_i)$, $i \in J$, so dass für jedes $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{K}$

$$\{ F(f)(a_i) : i \in J,\ f : M_i \longrightarrow X \} \text{ eine Basis}$$

des R-Moduls $F(X)$ ist. Besitzt F eine Basis, so heißt <u>F frei</u>. Ist $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ eine Klasse von Objekten von $\mathcal{K}$ mit $M_i \in \mathcal{M}$ $\forall i$, so heißt F <u>frei mit Modellen in $\mathcal{M}$</u>.

6.2 Typisches Beispiel; $\mathcal{K} = \mathrm{Top}$, F der n-te singuläre Kettenfunktor: $F(X) = C_n(X)$ = freier R-Modul mit den sing. n-Simplices von X als Basis.

Ist $\iota_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$ die Identität, so ist

$$\iota_n \in C_n(\Delta^n) \text{ eine Basis von } C_n$$

6.3 Basen eines Funktors haben analoge Eigenschaften wie Basen eines VR oder eines R-Moduls: Es sei $F : \mathcal{K} \to R\text{-Mod}$ frei mit Basis $a_i \in F(M_i)$, $i \in J$. Es sei $G : \mathcal{K} \to R\text{-Mod}$ ein weiterer Funktor und für alle $i \in J$ wähle ein Element $b_i \in G(M_i)$.

Dann gibt es genau eine natürliche Transformation

$\varphi : F \to G$ mit $\varphi_{M_i}(a_i) = b_i$, $i \in J$.

$\varphi_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ wird auf der Basis

$\{ F(f)(a_i) : i \in J, f : M_i \longrightarrow X \}$ definiert durch

$F(f)(a_i) \xmapsto{\varphi_X} G(f)(b_i)$. Damit φ_X eine natürliche Transformation ist, müssen wir φ_X so definieren. Da $\{ F(f)(a_i) : i \in J, f : M_i \to X \}$ eine Basis von $F(X)$ ist, dürfen wir so definieren.

6.4 <u>Azyklische Modelle Theorem(chen)</u>. Es seien $F, G : \mathcal{K} \longrightarrow$ R-Chain Funktoren, so dass

(i) $F_n(X) = G_n(X) = 0$, $n < 0$

(ii) $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ F_n frei mit Modellen in $\mathcal{M}_n$ ist und

$H_{n+1}(G(M)) = 0$ für $M \in \mathcal{M}_{n+1}$ und $M \in \mathcal{M}_{n+2}$

(iii) Für jedes $x \neq 0$, $x \in H_0(G(M))$, $M \in \mathcal{M}_1$, existiert $M' \in \mathcal{M}_0$ und ein Morphismus $f : M \longrightarrow M'$ mit $H_0(G(f))(x) \neq 0$ in $H_0(G(M'))$.

Dann existiert zu jeder natürlichen Transformation

$$\varphi : \quad H_0 F\big|_{\mathcal{M}_0} \longrightarrow H_0 G\big|_{\mathcal{M}_0}$$

bis auf natürliche Kettenhomotopie genau eine natürliche Transformation

$$f : F \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad H_0 f\big|_{\mathcal{M}_0} = \varphi .$$

<u>Beweis</u>: (Diesen Beweis haben wir schon mehrmals in Spezialfällen gesehen)

(a) Existenz. Sei zunächst $M \in \mathcal{M}_0$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
F_0(M) \arrow[r, dashed, "f_0 M"] \arrow[d] & G_0(M) \arrow[d] \\
H_0 F(M) \arrow[r, "\varphi_M"] & H_0 G(M)
\end{tikzcd}$$

$a_i^0 \in F_0(M_i^0)$, $i \in J_0$ sei Basis von F_0. Dann ist

$\{F(t)(a_i^0) \ : i \in J_0 , t : M_i^0 \to M\}$ Basis von $F_0(M)$

wähle f_{M_0} auf dieser Basis, so dass das Diagramm kommutiert. Damit kennen wir $f_0 M : F_0 M \to G_0 M$ für alle $M \in \mathcal{M}_0$. Dann erweitern wir, wie in 6.3 angedeutet zu einer nat. Transf. $f_0 : F_0 \longrightarrow G_0$. Nun betrachte $M \in \mathcal{M}_1 \subset \operatorname{Ob} \mathcal{K}$

$$\begin{tikzcd}
F_1(M) \arrow[d, "\partial_1^F"'] & G_1(M) \arrow[d, "\partial_1^G"] \\
F_0(M) \arrow[r, "f_0 M"] \arrow[d] & G_0(M) \arrow[d] \\
H_0 F(M) \arrow[r, dashed] & H_0 G(M)
\end{tikzcd}$$

Zunächst ist nicht klar, ob f_{0M} einen Homom. in H_0 induziert. Dazu muss $f_{0M}\,\partial_1^F(F_1M) \subset \partial_1^G(G_1M)$ gelten (dies wissen wir bisher nur für $M \in \mathcal{M}_0$; aber $M \in \mathcal{M}_1$)

Nun nutzen wir (iii).

Sei $y \in \partial_1^F(F_1M)$ und $x = f_{0M}(y)$. Ist $[x] \in H_0(G(M))$ nicht 0, so existiert $t : M \longrightarrow M'$ mit $M' \in \mathcal{M}_0$ und

$$(*) \quad H_0G(t)[x] = [G_0(t)(x)] \neq 0 \quad \text{in } H_0(G(M')).$$

Aber $[y] = 0$ in $H_0(F(M))$, also ist

$$[F_0(t)(y)] = 0 \text{ in } H_0(F_0(M')).$$ Also ist

$$[f_{0M'}\, F_0(t)(y)] = \varphi_{M'}\,[F_0(t)(y)] = 0.$$ Andererseits

ist $f_{0M'}\, F_0(t) = G_0(t)\, f_{0M}$, so dass

$$0 = [G_0(t) f_{0M}(y)] = [G_0(t)(x)] \neq 0.$$ Letzte Ungl. wegen *

Somit induziert $\forall M \in \mathcal{M}_1$ f_{0M} einen Homom. in H_0. Unter Ausnutzen einer Basis finden wir deshalb $f_{1M} : F_1(M) \longrightarrow G_1(M)$, so dass

$$\begin{tikzcd}
F_1(M) \arrow[r, "f_{1M}"] \arrow[d, "\partial_1"'] & G_1(M) \arrow[d, "\partial_1"] \\
F_0(M) \arrow[r, "f_{0M}"] \arrow[d, two heads] & G_0(M) \arrow[d, two heads] \\
H_0F(M) \arrow[r, "H_0 f_M"] & H_0G(M)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wieder wie in 6.3 lässt sich dies eindeutig zu einer nat. Transformation $f_1 : F_1 \longrightarrow G_1$ auf ganz $\mathcal{H}$ erweitern, so dass $\partial_1^G f_1 = f_0 \partial_1^F$ gilt. Nun sei $n > 1$ und für alle $i < n$ seien $f_i : F_i \to G_i$ definiert mit

$$\partial_i^G f_i = f_{i-1} \partial_i^F \quad (0 < i)$$

wir suchen $f_n : F_n \to G_n$ mit $\partial_n^G f_n = f_{n-1} \partial_n^F$. Wie vorher müssen wir das nur für $M \in \mathcal{M}_n$ machen. Den Rest erledigt 6.3. Ist $M \in \mathcal{M}_n \Rightarrow$ wegen (ii), dass $H_{n-1}(G(M)) = 0$.

(beachte, dass $n-1 > 0$)

$$\begin{array}{ccc} F_n(M) & \xrightarrow{f_n M} & G_n(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} \\ F_{n-1}(M) & \xrightarrow{f_{n-1} M} & G_{n-1}(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n-1}} \\ F_{n-2}(M) & \xrightarrow{f_{n-2} M} & G_{n-2}(M) \end{array}$$

$$\partial_{n-1} f_{n-1 M} \partial_n = f_{n-2 M} \partial_{n-1}^F \partial_n^F = 0.$$

Also ist $f_{n-1} \partial_n (x)$ ein Zykel, und wegen $H_{n-1} GM = 0$ auch ein Rand. Mittels einer Basis von $F_n(M)$ finden wir f_{nM} wie gewünscht. Das beendet den Induktionsschritt.

(b) Eindeutigkeit.

Dies geht genau wie vorher. Wir benötigen (iii) nicht mehr und von (ii) die Aussage, dass $H_n(G(M)) = 0$ für $M \in \mathcal{M}_n$, $n > 0$.

Hier die beiden relevanten Diagramme

Anfang:

$$\begin{tikzcd}
 & G_1(M) \arrow[d, "\partial_1 M"] \\
F_0(M) \arrow[ur, dashed, "h_{0M}"] \arrow[r, "f_{0M} - \bar{f}_{0M}"'] \arrow[d] & G_0(M) \arrow[d] \\
H_0 FM \arrow[r, "\varphi_M - \varphi_M", "0"'] & H_0 GM
\end{tikzcd}$$

$M \in \mathcal{M}_0$

$\forall x \in F_0(M)$ ist $(f_{0M} - \bar{f}_{0M})(x)$ ein Rand. Dies erlaubt h_{0M} auf Basis zu definieren, und somit $\forall X \in \mathcal{X}$.

Ind. schritt $(h_{ix} = 0 \quad i < 0)$. Sei $n > 0$,

für alle $i < n$ sei $h_i : F_i \longrightarrow G_{i+1}$ definiert mit

$\partial^G_{i+1} h_i + h_{i-1} \partial^F_i = f_i - \bar{f}_i$. Sei $M \in \mathcal{M}_n$

$$\begin{tikzcd}
 & G_{n+1}(M) \arrow[d, "\partial_{n+1}"] \\
F_n(M) \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f_{nM} - \bar{f}_{nM}"] \arrow[d, "\partial_n"'] & G_n(M) \arrow[d, "\partial_n"] \\
F_{n-1}(M) \arrow[ur, "h_{n-1 M}"'] \arrow[r, "f_{n-1} - \bar{f}_{n-1}"'] \arrow[d] & G_{n-1}(M) \\
F_{n-2}(M) \arrow[ur, "h_{n-2 M}"'] &
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen: $x \in F_n(M)$, so ist

$$(f_{nM} - \bar{f}_{nM} - h_{n-1M} \circ \partial_n)(x) \text{ ein Rand.}$$

Nach Annahme über $H_n GM$ reicht es zu zeigen, dass dies ein Zykel ist. Aber

$$\partial_n f_{nM} - \partial_n \bar{f}_{nM} - \partial_n h_{n-1M} \partial_n =$$

$$(f_{n-1M} - \bar{f}_{n-1M}) \circ \partial_n - (f_{n-1M} - \bar{f}_{n-1M} - h_{n-2M} \partial_{n-1}) \partial_n = 0.$$

Die Freiheit von F_n mit Modellen in $\mathcal{M}_n$ erlaubt dann wie vorher die Existenz der nat. Transformation $h_n : F_n \longrightarrow G_{n+1}$ mit

$$\partial_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n = f_n - \bar{f}_n .$$

$\square$

6.5 Beispiel 1: Homotopieaxiom

$F : \mathrm{TOP} \longrightarrow R\text{-Chain}$

$X \longmapsto C(X;R)$ (freier R-Modul über den sing. Simplixes)

$G : \mathrm{TOP} \longrightarrow R\text{-Chain}$

$X \longmapsto C(X \times I; R)$

Nat. Transformationen h^0, h^1 $\quad h^t : C(X) \longrightarrow C(X \times I)$
induziert durch Einbettung $j_t : X \hookrightarrow X \times \{t\} \subset X \times I$

F_n ist frei mit Basis $\iota_n \in C_n(\Delta^n)$, $\iota_n : \Delta^n \to \Delta^n$ Identität

$H_i(G(\Delta^n)) = 0$, $i > 0$.

h^0, h^1 induzieren in H_0 auf Δ^0 dieselbe Abbildung

$$R \underset{\text{kan.}}{\cong} H_0(C(\Delta^0)) \longrightarrow H_0(C(\Delta^0 \times I)) \underset{\text{kan.}}{\cong} R$$

Also sind $C(j_0)$ und $C(j_1)$ natürlich kettenhomotop

$\Rightarrow$ Homotopieinvarianz von $H(-; R)$.

<u>Beispiel 2</u>

$\mathcal{K} = TOP^2$, Obj. (X, Y), $X, Y \in TOP$

und naheliegende Morphismen $(f, g) : (X, Y) \to (X', Y')$.

$F(X, Y) = C(X \times Y)$ (mit und ohne Koeff.)

$G(X, Y) = C(X) \otimes C(Y)$

Dann ist F_n frei mit Basis $d_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n \times \Delta^n$

$x \longmapsto (x, x)$

und G_n frei mit Basis $d_n \in C_n(\Delta^n \times \Delta^n)$

$$d_{i\,n-i} = \iota_i \otimes \iota_{n-i} \in C_i(\Delta^i) \otimes C_{n-i}(\Delta^{n-i})$$

$$\in (C(\Delta^i) \otimes C(\Delta^{n-i}))_n$$

$H_i(G(\Delta^n, \Delta^n)) = H_i(C(\Delta^n) \otimes C(\Delta^n)) = 0 \quad i > 0$

Ebenso ist

$$H_j(F(\Delta^i, \Delta^{n-i})) = H_j(\Delta^i \times \Delta^{n-i}) = 0 \qquad j > 0$$

und die Bedingung (iii) ist für G (mit den Modellen

$\mathcal{M}_1 = (\Delta^1, \Delta^1)$, $\mathcal{M}_0 = (\Delta^0, \Delta^0)$) erfüllt und für

F mit den Modellen $\mathcal{M}_1 = \{(\Delta^0, \Delta^1), (\Delta^1, \Delta^0)\}$,

$\mathcal{M}_0 = (\Delta^0, \Delta^0)$ erfüllt.

Damit existieren bis auf natürliche Kettenhomotopie genau eine nat. Transformation

$$AW : F \longrightarrow G$$

$$EM : G \longrightarrow F$$

mit

$$\begin{array}{ccc} H_0(\Delta^0 \times \Delta^0) & \underset{H_0 EM_{(\Delta^0,\Delta^0)}}{\overset{H_0 AW_{(\Delta^0,\Delta^0)}}{\rightleftarrows}} & H_0(C(\Delta^0) \otimes C(\Delta^0)) \\ \| & & \cong \\ H_0(Pkt) & & H_0(Pkt) \otimes H_0(Pkt) \\ & & \cong \\ & & H_0(Pkt) \end{array}$$

jeweils die Identität. Insbesondere sind AW und EM zueinander inverse natürliche Kettenhomotopieäquivalenzen.

6.6 Der Satz von Eilenberg u. Zilber

Das letzte Beispiel ist die Aussage des Eilenberg-Zilber-Theorems

Es gibt natürliche zueinander inverse Kettenhomotopie-äquivalenzen

$$AW: C(X\times Y) \rightleftarrows C(X)\otimes C(Y) : EM$$

die bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmt sind durch

$$H_0 AW : H_0(\Delta^0\times\Delta^0) \rightleftarrows H_0(C(\Delta^0)\otimes C(\Delta^0)) : H_0 EM$$

$$\begin{array}{ccc} \cong \text{nat.} & & \cong \text{nat.} \\ R & \underset{id}{\overset{id}{\rightleftarrows}} & R \end{array}.$$

Für AW lässt sich leicht eine explicite Abb. angeben (Für EM ist das ein wenig umständlicher. Dafür hat dieses EM bessere Eigenschaften)

Es seien $\pi_X : X\times Y \to X$, $\pi_Y : X\times Y \to Y$ die Projektionen. Definiere

$$AW_{(X,Y)} : C(X\times Y) \longrightarrow C(X)\otimes C(Y)$$

auf Basiselement $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X\times Y$ von $C_n(X\times Y)$ durch

$$AW_{(X,Y)}(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \pi_X\circ\sigma[0,1,\dots,i] \otimes \pi_Y\circ\sigma[i,\dots,n]$$

$$\in \bigoplus_{i=0}^{n} C_i(X)\otimes C_{n-i}(Y).$$

Übung: Zeige, dass dieses AW natürlich ist und das Gewünschte tut.