5. Bemerkungen zu $\otimes$

5.1 Als Spezialfall des Künnethsatzes erhalten wir:

seien M, N R-Moduln,

$$0 \to F_1 \to F_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

$$0 \to G_1 \to G_0 \xrightarrow{q} N \to 0$$

freie Auflösungen

Dann sind $F = (0 \to F_1 \to F_0 \to 0)$ und G freie Kettenkomplexe. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F_1 \otimes G_1 \arrow[r, "\partial^F \otimes G_1"] \arrow[d, "+F_1 \otimes \partial^G"'] & F_0 \otimes G_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "F_0 \otimes \partial^G"] & M \otimes G_1 \arrow[d, "M \otimes \partial^G"] \\
0 \arrow[r] & F_1 \otimes G_0 \arrow[r, "\partial^F \otimes G_0"] \arrow[d] & F_0 \otimes G_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr] & M \otimes G_0 \arrow[d, dashed, "M \otimes q"] \\
 & F_1 \otimes N \arrow[r] & F_0 \otimes N \arrow[r, two heads] & M \otimes N
\end{tikzcd}$$

Die rechte Spalte entsteht aus der Definition des Tensorprodukts. Die untere Zeile soll einfach der Kokern der darüber liegenden Abbildung sein. Der schräge Pfeil kommt vom Künneth-Satz

$$0 \to H_0(F) \otimes H_0(G) \xrightarrow{\cong} H_0(F \otimes G) \to 0$$

$$M \overset{=}{\otimes} N \quad \text{aus} \quad F_0 \otimes G_0 \xrightarrow{[\ ]} H_0(F \otimes G).$$

Dass die untere Zeile tatsächlich $F_i \otimes N$ enthält liegt daran, daß für eine Basis $B_i \subset F_i$ wir die Spalte

$$\begin{array}{c} \bigoplus_{b \in B_i} G_1 \\ \Big\downarrow \bigotimes_{b \in B_i} \partial^G \\ \bigoplus_{b \in B_i} G_0 \end{array}$$

vorliegen haben, so dass der Kokern einfach

$$\bigoplus_{b \in B_i} N \quad =: F_i \otimes N \qquad \text{ist.}$$

Addieren wir nun den gestrichelten Pfeil hinzu, so kommutiert das rechte untere Quadrat. Nutzt man, dass der Kern von $F_0 \otimes G_0 \longrightarrow M \otimes N$ der Untermodul $\partial^F \otimes G_0 (F_1 \otimes G_0) + F_0 \otimes \partial^G (F_0 \otimes G_1)$ ist, so sehen wir, dass die rechte Spalte exakt ist.

Damit erhalten wir $M \otimes N$ auf drei Arten.

Als H_0 von $F \otimes N$, von $F \otimes G$ und von $M \otimes G$.

Wir können also wahlweise M auflösen und mit N von rechts tensorieren, oder N auflösen und mit M von links tensorieren oder beide auflösen und das Resultat tensorieren. Anschließend gehen wir über zu H_0, um $M \otimes N$ zu erhalten.

5.2 Kommutativität von $\otimes$

Sind A, B freie R-Moduln mit Basen α, β

so ist $A \otimes B = \bigoplus_{a \in \alpha} B = \bigoplus_{a \in \alpha} \left(\bigoplus_{b \in \beta} R \right)$

$$\underset{\text{nat.}}{\cong} \bigoplus_{(a,b) \in \alpha \times \beta} R$$

und analog $B \otimes A = \bigoplus_{(b,a) \in \beta \times \alpha} R \cong \bigoplus_{(a,b) \in \alpha \times \beta} R$

Es gibt somit einen natürlichen Isom. $A \otimes B \cong B \otimes A$

$$x \otimes y \longmapsto y \otimes x$$

Sind F, G beliebige freie Kettenkomplexe, so

definiert $\quad f_i \otimes g_j \longmapsto (-1)^{i \cdot j} g_j \otimes f_i$

$f_i \in F_i$, $g_j \in G_j$ eine Kettenabb. $F \otimes G \to G \otimes F$,

und somit einen Isom. von Kettenkomplexen. Denn

$$\begin{array}{ccc} f_i \otimes g_j & \longrightarrow & (-1)^{i \cdot j} g_j \otimes f_i \\ \Big\downarrow \partial^{F \otimes G} & & \Big\downarrow \partial^{G \otimes F} \\ & & (-1)^{i \cdot j} \partial g_j \otimes f_i + (-1)^{i \cdot j + j} g_j \otimes \partial f_i \\ & & = \\ \partial_i f_i \otimes g_j + (-1)^i f_i \otimes \partial_j g_j & \longrightarrow & (-1)^{(i-1) \cdot j} g_j \otimes \partial_i f_i + (-1)^{i + i(j-1)} \partial_j g_j \otimes f_i \end{array}$$

Dies liefert einen Isomorphismus $M \otimes N \to N \otimes M$ bei dem $m \otimes n$ auf $n \otimes m$ abgebildet wird.

5.3 Assoziativität. Jetzt sollte folgende Aussage völlig klar sein.

$$\begin{aligned} (M \otimes N) \otimes P &\longrightarrow M \otimes (N \otimes P) \\ (m \otimes n) \otimes p &\longmapsto m \otimes (n \otimes p) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

5.4 Alle entsprechenden Aussagen gelten natürlich auch für das Torsionsprodukt, insbesondere

$$M * N \cong N * M, \quad (M * N) * P \cong M * (N * P).$$