4. Vorlesung

Das algebraische Künneth-Theorem.

4.1 Zur Erinnerung.

(a) Jeder R-Modul M ist ein Kettenkomplex mit M im Grad 0 und sonst nur die Null in jedem Grad.

(b) Ist D Kettenkomplex, so fassen wir $H(D)$ als Kettenkomplex auf mit $(H(D))_n := H_n(D)$ und 0 als Randabbildung in jedem Grad. Insbesondere ist

$$H_n(H(D)) = H_n(D).$$

(c) Sind C, D Kettenkomplexe, so ist

$C \otimes D$ ein Kettenkomplex mit

$(C \otimes D)_n = \bigoplus\limits_i C_i \otimes D_{n-i}$ und auf

dem Summanden $C_i \otimes D_{n-i}$ ist $\partial_n^{C \otimes D}$

gegeben durch

$$c_i \otimes d_{n-i} \quad (\text{diese Elemente erzeugen } C_i \otimes D_{n-i})$$

$$\downarrow$$

$$\partial_i^C(c_i) \otimes d_{n-i} + (-1)^i c_i \otimes \partial_{n-i}^D(d_{n-i}) \in C_{i-1} \otimes D_{n-i} \oplus C_i \otimes D_{n-i-1}$$

$$\subset (C \otimes D)_{n-1}.$$

(d) Damit ist $H(C) \otimes H(D)$ definiert. Analog definieren wir $H(C) * H(D)$ durch $(H(C) * H(D))_n = \bigoplus\limits_i H_i(C) * H_{n-i}(D)$.

4.2 Formulierung des alg. Künnethsatzes

Es sei C ein freier R-Kettenkomplex und D ein R-Kettenkomplex. Dann existiert eine natürliche kurze exakte Sequenz von R-Kettenkomplexen

$$0 \to H(C)\otimes H(D) \xrightarrow{-\times-} H(C\otimes D) \longrightarrow s(H(C) * H(D)) \to 0$$

Die Sequenz spaltet, aber nicht natürlich.

4.3 Spezialfall. C ist frei und alle Randabb. in C sind 0. Dann ist

$$\partial^{C\otimes D}(c_i \otimes d_{n-i}) = (-1)^i c_i \otimes \partial^D_{n-i} d_{n-i}$$

$$(C\otimes D)_n = \bigoplus_i C_i \otimes D_{n-i} \quad . \quad \text{Da } C_i \text{ frei ist, ist}$$

$$C_i \otimes D_{n-i} = \bigoplus_{E_i} D_{n-i} \quad , \; E_i \subset C_i \text{ Basis.}$$

so dass wir $C_i \otimes D_{n-i}$, $n \in \mathbb{Z}$, einfach als direkte Summe des um i-Grade verschobenen Kettenkomplexes D auffassen können. Die Randabb. betrifft nur D, so dass

$$C_i \otimes D \cong \bigoplus_{E_i} s^i D \quad , \quad (s^i D)_n = D_{n-i}$$

$$s^i\partial : (s^i D)_n \to (s^i D)_{n-1}$$

$$s^i\partial = (-1)^i \partial^D_{n-i}$$

Klauben wir nach Übergang zur Homologie die Terme in Dimension n wieder zusammen, so ist

$$H_n(C\otimes D) = (C\otimes H(D))_n = \bigoplus_i C_i \otimes H_{n-i}(D)$$

Wegen $H_i(C)=C_i$ und $C_i * M = 0 \ \forall M$ erhalten wir den Künnethsatz für diesen Spezialfall. Uns interessiert allerdings mehr, dass in diesem Spezialfall

$$H_n(C\otimes D) = (C\otimes H(D))_n \text{ ist.}$$

4.4 Beweis des Künnethsatzes (wie zuvor)

Beginne mit der k.e.S. freier Kettenkomplexe

$$0 \to Z \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\partial} sB \to 0 \quad , Z\subset C \text{ Zykel}$$

von C, B Ränder von C; Z und sB sind freie Kettenkomplexe, deren Randabb. alle 0 sind. Die lange exakte Homologiesequenz der k.e.S.

$$0 \to Z\otimes D \to C\otimes D \to sB\otimes D \to 0 \qquad (*)$$

hat demnach die Form

$$\to (sB\otimes H(D))_{n+1} \xrightarrow{r_{n+1}} (Z\otimes H(D))_n \to H_n(C\otimes D) \to$$

$$(sB\otimes H(D))_n \xrightarrow{r_n} (Z\otimes H(D))_{n-1} \to \cdots$$

so dass wir für jedes n die k.e.S.

$$0 \to \operatorname{koker} r_{n+1} \to H_n(C\otimes D) \to \ker r_n \to 0$$

erhalten. Hierbei ist r_n die jeweilige Randabb., die zur k.e.S. $0 \to Z\otimes D \to C\otimes D \xrightarrow{\partial^C\otimes D} sB\otimes D \to 0$ gehört.

Obwohl es eigentlich offensichtlich ist, zeigen wir, dass

$$r_{n+1}: (sB\otimes H(D))_{n+1} = (B\otimes H(D))_n \longrightarrow (Z\otimes H(D))_n$$

die von der Inklusion $B_i \xhookrightarrow{j_i} Z_i$ induzierte Abbildung ist.

Wir nutzen dazu, dass wir Aufspaltungen $\sigma_i : (sB)_i = B_{i-1} \to C_i$ von $\partial_i^C : C_i \to B_{i-1}$ haben (d.h. $\partial_i^C \circ \sigma_i = id_{B_{i-1}}$). Dies induziert Homom.

$$\sigma\otimes D : (sB\otimes D) \longrightarrow (C\otimes D)\,,$$ so dass

wir Abbildungen auf den Erzeugenden der Form

$$b_i\otimes[z_{n-i}]\,,\quad b_i\in B_i\,,\quad [z_{n-i}]\in H_{n-i}(D)$$

verfolgen können. Nehmen $b_i\otimes z_{n-i}$ als Repräsentanten liften mit $\sigma_{i+1}\otimes D_{n-i}$ nach $C_{i+1}\otimes D_{n-i}$, machen dann die Randabb. in $(C\otimes D)$; nutzen, dass $\partial^D_{n-i}(z_{n-i}) = 0$ ist und $\partial^C_{i+1}\sigma_{i+1} = id_{B_i}$; erhalten somit

$$b_i\otimes z_{n-i}$$ Dies ist ein Zykel

von $Z_i\otimes D_{n-i}$ mit Klasse $b_i\otimes[z_{n-i}]\in Z_i\otimes H_{n-i}(D)$.

Das war zu zeigen. Also bleibt nur noch

$$\mathrm{koker}\left(\left(B_i\otimes H_{n-i}(D)\right) \xrightarrow{j_i\otimes H_{n-i}(D)} Z_i\otimes H_{n-i}(D)\right)$$

und ker (")

zu beschreiben.

Wie zuvor schauen wir uns die freie Aufl.

$$0 \to B_i \xrightarrow{j_i} Z_i \to H_i(C) \to 0$$

$$z_i \longmapsto [z_i]$$

von $H_i(C)$ an.

und sehen: $$\operatorname{koker} r_{n+1}\Big|_{B_i \otimes H_{n-i}(D)} = H_i(C) \otimes H_{n-i}(D)$$

$$\ker r_n \Big|_{B_{i-1} \otimes H_{n-i}(D)} = H_{i-1}(C) * H_{n-i}(D)$$

Da die r_k die Summenzerlegungen der Tensorprodukte

$B \otimes H(D)$ und $Z \otimes H(D)$ respektieren, hat unsere Sequenz die gewünschte Form. Wieder können wir summenweise aufspalten, um eine Gesamtaufspaltung

$$(H(C) * H(D))_{n-1} \longrightarrow H(C \otimes D)$$ zu erhalten. □