14. Poincaré Dualität simplizial

Im Folgenden sind wir etwas lax im Unterscheiden von Simplizialkomplexen K und deren Realisierung $|K|$.

Triangulierbare Homologie-n-Mannigfaltigkeit (H-n-Mf): dies ist ein triangulierbarer top. Raum M, so dass

$$\forall x \in M \qquad H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

<u>1. Lemma:</u> Sei $|K|$ eine triangulierte H-n-Mf und $\sigma \in K$ ein k-Simplex. Dann gilt

$$\tilde{H}_i(|Lk_K(\sigma)|) \cong \tilde{H}_i(S^{n-k-1})$$

<u>Bew.</u> Sei $x = \hat{\sigma}$ der Schwerpunkt von σ. Dann ist $\overline{St_K(\sigma)}$ der Kegel über $Rd\sigma * Lk_K(\sigma)$ mit x als Kegelspitze. $Rd\sigma \cong S^{k-1}$. Also

$$\tilde{H}_{j-1}(S^{n-1}) \cong H_j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong H_j(|K|, |K| \setminus \{x\})$$

$$\underset{\text{exz.}}{\cong} H_j(\overline{St_K(\sigma)}, \overline{St_K(\sigma)} \setminus \{x\})$$

$$= H_j(\{x\} * Rd\sigma * Lk_K(\sigma), \{x\} * Rd\sigma * Lk_K(\sigma) \setminus \{x\})$$

$$\cong \tilde{H}_{j-1}(Rd\sigma * Lk_K(\sigma)) \cong$$

$$\tilde{H}_{j-1-k}(Lk_K(\sigma))$$ (Denn $S^{k-1} * Lk_K(\sigma)$ ist k-fache Einhängung von $Lk_K(\sigma)$).

Also für $i = j-1-k$ ist $\tilde{H}_i(Lk_K(\sigma)) \cong \tilde{H}_i(S^{n-1-k})$. $\square$

2. Dualer Zellkomplex von $|K|$; $|K|$ abzählt triang. H-n-Mf.

Es sei $K^{(1)}$ die baryzentr. Unterteilung von K.

Simplizes haben die Form

$s(\hat{\sigma}_0\,\hat{\sigma}_1 \cdots \hat{\sigma}_l)$ mit $\sigma_l < \cdots < \sigma_0$ eine echt aufsteigende Folge von Simplizes.

Für $\sigma \in K$, $\dim \sigma = k$ sei

$$D(\sigma) = \left| \{ s(\hat{\sigma}_0 \cdots \hat{\sigma}_l) \in K^{(1)} \text{ mit } \sigma_l = \sigma \} \right|$$
und Seiten davon

Die Simplices von $D(\sigma)$ sind alles Seiten von Simplices der Form

$$s(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-k}),\ \sigma_{n-k} = \sigma$$

und $\dim \sigma_i = n-i$. $D(\sigma)$ ist also ein $(n-k)$-dim Unterkomplex von $K^{(1)}$. Er ist zusammenziehbar auf $\hat{\sigma}$, da jedes Simplex Seite eines Simplex ist, das $\hat{\sigma}$ als Ecke enthält.

Weiter ist $Lk_{D(\sigma)}(\hat{\sigma}) \cong Lk_K(\sigma)$, denn

$$Lk_K(\sigma) = \bigcup \{ \tau \in \overline{St}_K(\sigma) : \tau \cap \sigma = \emptyset \}.$$

Bilde die Eckpunkte von $s(\hat{\sigma}_0 \cdots \hat{\sigma}_{n-k-1})$ mit $\sigma \lneq \sigma_{n-k-1}$ jeweils auf den Schwerpunkt des σ gegenüberliegenden Simplex von $\hat{\sigma}_i$, $i = 0, \ldots, n-k-1$, ab. Dies sind Eckpunkte eines $(n-k-1)$-Simplex im Raum σ_0.

genauer ist das Bildsimplex ein Simplex der baryzentrischen Unterteilung von $Lk_K(\sigma)$.

Wir sehen, $(D(\sigma), D(\sigma) \setminus \hat{\sigma})$ hat die Homologie von (B^{n-k}, S^{n-k-1}).

und $\bigcup_{\sigma \in K} D(\sigma) = |K|$. (Hier muss

Definieren wir den dualen Kettenkomplex durch

$$DC_{n-k} := H_{n-k}\Big(\bigcup_{\dim\sigma \geq k} D(\sigma), \bigcup_{\dim\tau \geq k+1} D(\tau) \Big)$$

mit der naheliegenden Randabb. und beachtet man, dass

$$H_i\Big(\bigcup_{\dim\sigma \geq k} D(\sigma), \bigcup_{\dim\sigma \geq k+1} D(\sigma) \Big) = \begin{cases} 0 & i \neq n-k \\ \mathbb{Z}^{\#k\text{-Simplices von } K} & \end{cases},$$

so können wir wie beim Nachweis, dass zelluläre Homologie die singuläre berechnet, zeigen, dass

$$H_i(DC_*) \cong H_i(|K|).$$

Poincaré-Dualität folgt nun so:
Man konstruiert einen Isom.

$$PD : C^i_\Delta(K) \longrightarrow DC_{n-i}(K)$$

Ordne die Eckpunkte explizit. Dies definiert eine Δ-Struktur auf $|K|$.

Die i-Simplices bilden Basis von $C_i^\Delta(K)$.

Sind $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_i}$ diese i-Simplizes, so sei $\sigma_1^*, \dots, \sigma_{r_i}^*$ die dazu duale Basis in $C^i_\Delta(K)$.

Die Eckenanordnung liefert eine Kettenabb.

$$C^\Delta(K^{(1)}) \xrightarrow{\tau} C^\Delta(K)$$

$$s(\hat\sigma_0, \hat\sigma_1, \dots, \hat\sigma_i) \longrightarrow s(v_{\sigma_0}, \dots, v_{\sigma_i})\text{, wobei}$$

v_σ jeweils die erste Ecke von σ ist. Sind zwei der Ecken $v_{\sigma_0}, \dots, v_{\sigma_i}$ gleich, so fassen wir $s(v_{\sigma_0}, \dots, \sigma_i)$ als das Nullelement von $C_i^\Delta(K)$ auf. Es gibt daher für das i-Simplex $s(v_0, \dots, v_i)$ von K genau ein i-Simplex der Unterteilung von $s(v_0, \dots, v_i)$, das nicht auf 0 abgebildet wird, nämlich (wir nehmen natürlich an, dass $v_0 < v_1 < \dots < v_i$ ist) $s(\hat\sigma_0, \hat\sigma_1, \dots, \hat\sigma_i)$ mit $\sigma_k = s(v_k, \dots, v_i)$, $k = 0, \dots, i$.
Diese Kettenabb. ist die Kettenhomotopie inverse

des baryzentrischen Unterteilungshomomorphismus

$$\mathrm{sd} : C^{\Delta}(K) \longrightarrow C^{\Delta}(K^{(1)})$$

induziert also einen Iso. in Homologie und Kohomologie

Es sei $\tau^* : C^*_{\Delta}(K) \longrightarrow C^*_{\Delta}(K^{(1)})$

die zu τ duale Abbildung.

<u>Beachte:</u> $\overline{St}_{K^{(1)}}(\hat{\sigma}) = \bigcup \{ s(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_n) : \sigma_{n-k} = \sigma \}$

wenn $\dim \sigma = k$.

$$Lk_{K^{(1)}}(\hat{\sigma}) = \bigcup \{ s(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1}) : \sigma_{n-k} \underset{\neq}{<} \sigma < \sigma_{n-k-1} \}$$

$$H_i(\overline{St}_{K^{(1)}}(\hat{\sigma}), Lk_{K^{(1)}}(\hat{\sigma})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wähle ein Erz. z_n für $H_n(\overline{St}\,\hat{\sigma}, Lk\,\hat{\sigma})$ das ist Summe aller n-Simplizes von $\overline{St}_{K^{(1)}}(\hat{\sigma})$ mit Koeff. $+1$ oder -1, so dass ∂z_n Kette von $Lk_{K^{(1)}}\hat{\sigma}$ ist.

<u>Lemma:</u> $\tau^*\sigma^* \cap z_n$ ist $(n-i)$-Kette in $C^{\Delta}_{n-i}(D(\sigma))$, die $H^{\Delta}_{n-i}(D(\sigma), \dot{D}(\sigma)) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt.

Denn

$\tau^* \sigma^*$ ist nur auf $s(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_i)$ von 0 verschieden

wenn $\sigma_k = s(v_k, \ldots, v_i)$ ist, wobei

$\sigma = s(v_0, \ldots, v_i)$.

Also ist $\tau^* \sigma^*$ gleich $s(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_i)^*$ in $C^i_\Delta(K^{(1)})$

$$s(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_i)^* \wedge \sigma(\hat{\tau}_0, \ldots, \hat{\tau}_n) =$$

$$(-1)^{i(n-i)} \sigma(\hat{\tau}_0, \ldots, \hat{\tau}_{n-i}) \cdot s(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_i)^* s(\hat{\tau}_{n-i}, \ldots, \hat{\tau}_n)$$

$\neq 0$ genau dann, wenn $\hat{\sigma}_0 > \sigma_1 > \ldots \sigma_i =$

$\tau_{n-i} > \tau_{n-i+1} > \ldots > \tau_n$

also $\tau_{n-i} = \sigma_0 = \sigma$, und weitere Bedingungen.

D.h. $\tau^* \sigma^* \wedge (\hat{\tau}_0, \ldots, \hat{\tau}_n)$ ist Summe aller

$(n-i)$-Simplices $\in D(\sigma)$ mit Koeff. $+1$ oder -1

übrigens ist $\tau^* \sigma^*$ auf allen n-Simplices von $K^{(1)}$, die nicht in $\overline{St}_{K^{(1)}}(\hat{\sigma})$ liegen, gleich 0.

Um zu zeigen, dass $\tau^* \sigma^* \wedge z_n$ tatsächlich ein Erzeugendes von $H^{\Delta}_{n-i}(D(\sigma), \dot{D}(\sigma))$

(Nachtrag: $\dot{D}(\sigma) = \bigcup \{ s(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_{n-i-1}) : \sigma \underset{\neq}{\leq} \sigma_{n-i-1} \}$)

ist, genügt es zu zeigen, dass $\tau^*\sigma^* \wedge (\partial z_n)$ Kette und $\partial(\tau^* \sigma^* \wedge z_n) = \tau^* \delta \sigma^* \wedge z_n + (-1)^i \tau^* \sigma^* \wedge \partial z_n$

Kette in $\dot{D}(\sigma)$ ist.

Das folgt leicht, da

(i) $\delta \sigma^* = \sum\limits_{\substack{\sigma < \varrho \\ \dim \varrho = \dim \sigma + 1}} \varepsilon_\varrho \varrho^*$

und $\tau^* \varrho^*$ nur Werte in $D(\varrho)$ hat.

Dies sind genau die Simplices in $\dot{D}(\sigma)$ bei denen $\sigma_{n-i-1} = \varrho$ ist.

(ii) ∂z_n Kette in $Lk_{K^{(1)}}(\hat{\sigma})$ ist, so dass

$\tau^* \sigma^* \wedge \partial z_n$ wieder Kette in $\dot{D}(\sigma)$ ist.

Wir erhalten somit eine (von Wahlen der Erz. $z_n \in H_n(\overline{St}_{K^{(1)}}(\sigma), Lk_{K^{(1)}}(\hat{\sigma}))$ abhängende Bijektion $C^i_\Delta(K) \longrightarrow DC_{n-i}$

in dem wir die einzelnen Abb.

$$\hat{\sigma} \longmapsto \tau^*\sigma^* \cap z_n \quad \text{zusammenstückeln.}$$

Ist nun $|K|$ orientierbar. D.h. wir können alle n-Simplices $\in K^{(1)}$ so mit Vorzeichen $+1$ oder -1 versehen, dass deren Summe $[z^{(1)}] =: [M]$ ein Zykel ist. Genau dann ist (jede Komponente) von $|K| = M$ orientierbar, denn $[z]$ ist ein Erzeuger von $H_n^\Delta K^{(1)}$, wenn M zshgd. ist.

Dies induziert auf jedem $\overline{St}_{K^{(1)}}(\hat{\sigma})$ Vorzeichen der n-Simplices und offensichtlich ist dann die entsprechende Kette z_σ ein Erzeuger von von $H_n(St_{K^{(1)}}(\hat{\sigma}), Lk_{K^{(1)}}(\hat{\sigma}))$

Nun gilt

$$\tau^*\sigma^* \cap z = \tau^*\sigma^* \cap z_\sigma \quad \text{und}$$

$$\partial(\tau^*\sigma^* \cap z) = \tau^*\delta\sigma^* \cap z + 0$$

Also induziert

$$\tau^*(-) \cap z : C^i_\Delta(K) \longrightarrow D\, C_{n-i}(K)$$

einen Isomorphismus von Kettenkomplexen. In Homologie haben wir damit

$$H^i(|K|) \xrightarrow{-\cap [z]} H_{n-i}(|K|) \text{ ist ein Iso. } \square$$