Poincaré-Dualität simplizialer Mannigfaltigkeiten

Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n.

M sei geschlossen und zusammenhängend.
(kompakt, ohne Rand)

M heißt <u>trianguliert</u> wenn es einen (endlichen) Simplizialkomplex K und einen Homöomorphismus $|K| \cong M$ gibt.

<u>Bemerkung:</u>

- K gibt eine Zellzerlegung von M, die Zellen sind gerade die offenen Simplices von K.
- Wir unterscheiden nicht immer zwischen K und der Realisierung $|K|$.

<u>Erinnerung (baryzentrische Unterteilung)</u>

Sei K ein Simplizialkomplex.

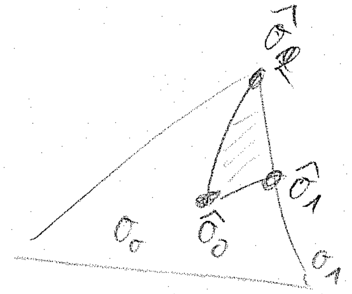
Wenn $\tau, \sigma \in K$ heißt $\tau < \sigma$ τ ist echte Seite von σ.

Die <u>baryzentrische Unterteilung</u> K' von K ist der

Simplizialkomplex mit Simplices

$s(\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \cdots \hat{\sigma}_\ell|$ mit $\sigma_\ell < \cdots < \sigma_0$

und $\hat{\sigma}_i$ der Baryzenter von $\hat{\sigma}_i$!



Def:

Sei $\sigma \in K$ Simplex, $\dim \sigma = k$. Setze

$$\sigma^* = \{ s(\hat{\sigma}_{i_\ell} \cdots \hat{\sigma}_{i_1} \hat{\sigma})| \mid \sigma < \sigma_{i_1} < \cdots < \sigma_{i_\ell} \} \subset |K'|$$

"zu σ dualer Teilraum"

$$D(\sigma) = D_K(\sigma) = \{ s(\hat{\sigma}_{i_\ell} \cdots \hat{\sigma}_{i_0}) \mid \sigma \leq \sigma_{i_0} \} \subset K'$$

$$\mathring{D}(\sigma) = \mathring{D}_K(\sigma) = \{ s(\hat{\sigma}_{i_\ell} \cdots \hat{\sigma}_{i_0}) \mid \sigma < \sigma_{i_0} \} \subset K'$$

Bem:

- $|D(\sigma)| = \overline{\sigma^*}$, d.h. σ^* + Ränder
- $|\mathring{D}(\sigma)| = \overline{\sigma^*} \setminus \sigma^*$ "Rand von σ^*"
- $\dim D(\sigma) = n - k$, $\dim \mathring{D}(\sigma) = n - k - 1$

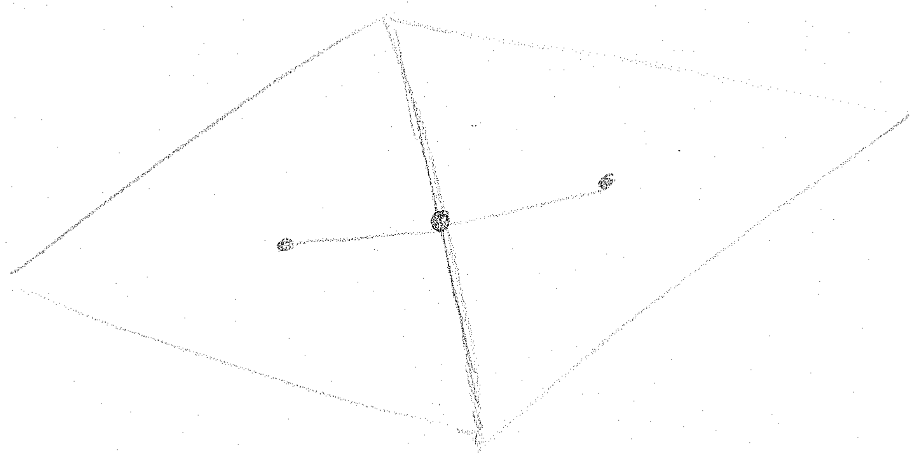
(3)

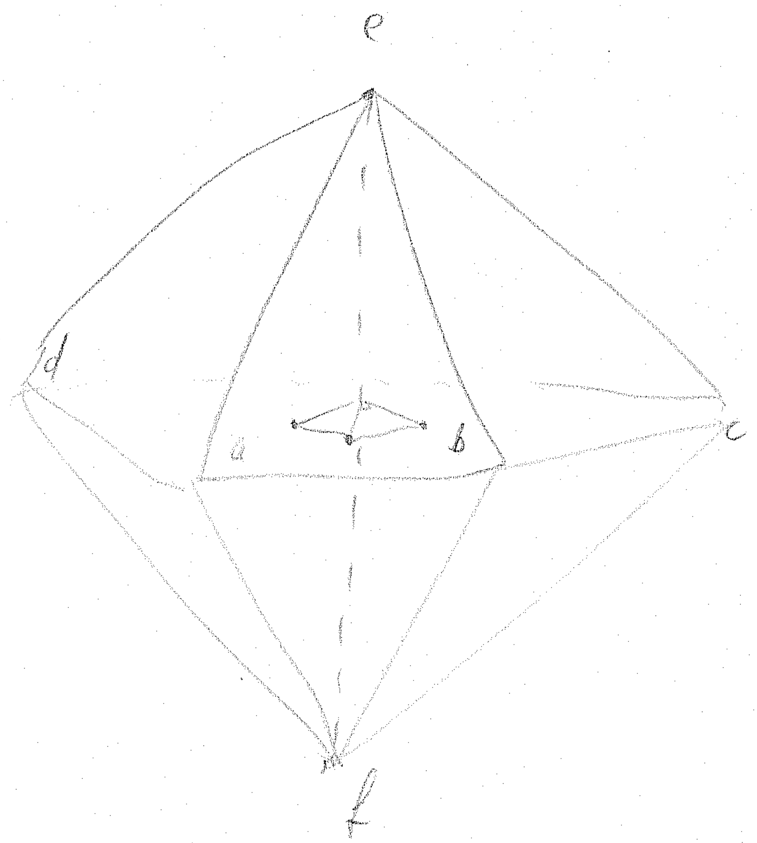
- Wenn $\tau \neq \sigma$ gilt $\tau^* \cap \sigma^* = \emptyset$ und

$$\bigcup_{\sigma \in K} \sigma^* = M$$

Bilder: $\dim \sigma = 0 \Rightarrow \sigma^*$ der Eckstern, $\dim \sigma = n \Rightarrow \sigma^* = \hat{\sigma}$

Baryzenter





<u>Satz:</u> Für $\sigma \in K$, $\dim \sigma = q$ hat

$(D(\sigma), \dot{D}(\sigma))$ die Homologie von

(D^{n-q}, S^{n-q-1})

<u>Bem:</u>

- $(D(\sigma), \dot{D}(\sigma))$ heißt $(n-q)$-dim Homologiezelle
- I. A. <u>nicht</u> richtig, dass $\dot{D}(\sigma) \cong S^{n-q-1}$

<u>Anmerkungen zum Satz:</u>

- $D(\sigma)$ ist $n-q$-dim Simplizialkomplex
- $D(\sigma)$ ist zusammenziehbar, da jedes Simplex höchster Dimension $\hat{\sigma}$ enthält.

Der Beweis benutzt, dass

- $|D(\sigma)| \cong |\underbrace{\dot{D}(\sigma) * \hat{\sigma}}_{\text{Kegel/Join}}|$
- sowie dass $\dot{D}(\sigma) * \operatorname{sd} \operatorname{Bd}(\sigma) \cong Lk_{K'}(\hat{\sigma})$
- u. $|\operatorname{Bd}(\sigma)| \cong S^{q-1}$, $* S^{q-1}$; $q-1$-fache Einhängung.
- + Homologiesequenzen

Auf Kettenkomplexebene gilt; da

$D(\sigma)$ ein $n-q$-dim Unterkomplex von K'

ist, dass $H_{n-q}(D(\sigma), \mathring{D}(\sigma))$ aus $(n-q)$-Ketten

besteht, die in $D(\sigma)$ u. deren Rand in $\mathring{D}(\sigma)$

liegt.

$\Rightarrow$ $\exists$ Eindeutig bis aufs Vorzeichen eine

Kette $\sigma^* \in C_{n-q}(D(\sigma)) \subset C_{n-q}(K')$, so

dass $\partial\sigma^* \in C_{n-q-1}(\mathring{D}(\sigma))$ und jede andere

solche Kette ein ganzzahliges Vielfaches

davon ist.

σ^* heißt Fundamentalzyklus des zu

σ dualen Teilraums

Definition:

$C^*_{n-q}(K')$ sei die von allen Fundamentalzykeln σ^* erzeugte Untergruppe von $C_{n-q}(K')$

(Vorstellung: $\sigma^* \in C^*_{n-q}(K')$ Zykel gehörend zu $\sigma^* \subset M = |K|$ Unterraum.)

Andere Definition:

Setze $$X_p = \bigcup_{\substack{\sigma \\ \dim(D(\sigma)) \leq p}} D(\sigma)$$

Dann gilt: $|K| = \bigcup X_p$

$$H_i(X_p, X_{p-1}) = \begin{cases} 0 & i \neq p \\ \mathbb{Z}^{\#\sigma} & i = p \end{cases}$$

i.e. $H_p(X_p, X_{p-1})$ gibt "dualen zellulären Ketten Komplex", ähnlich wie in üblicher zellulärer Homologie.

Das ist der gleiche Kettenkomplex wie $C^*_{n-q}(K')$

Satz:

$$C^*(K') \longrightarrow C(K')$$

induziert einen Isomorphismus auf Homologie.

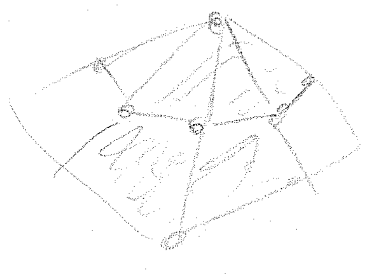
Beweis wie bei zell. Homologie.

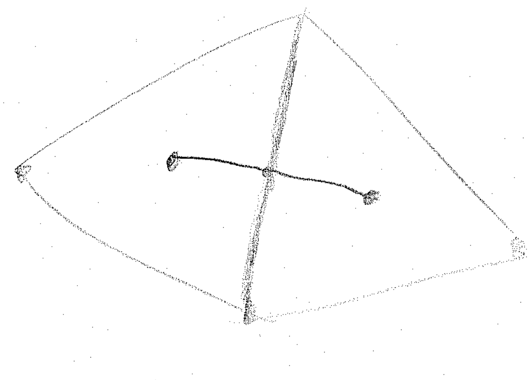
D gibt jetzt eine Abbildung

$$C_q(K) \longrightarrow C^*_{n-q}(K')$$
$$\sigma \longmapsto D(\sigma)$$

Diese ist ein Isomorphismus.

Problem: Keine Abb. von Kettenkomplexen.





Betrachte

$\mathrm{Hom}(C_q(K),\mathbb{Z})$, wähle duale Basis $\tilde{\sigma}$

zu $\sigma \subset K$ Simplex.

Definiere

$$\gamma: \mathrm{Hom}(C_q(K),\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} C^*_{n-q}(K')$$

via $\qquad \tilde{\sigma} \longmapsto \sigma^*$

(Beachte: σ^* beinhaltet Wahl eines Erzeugers)

Falls:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(C_q(K),\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\cong"', "\gamma"] & \mathrm{Hom}(C_{q+1}(K),\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"', "\gamma"] \\
C^*_{n-q}(K') \arrow[r, "\partial"] & C^*_{n-q-1}(K')
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Kommutiert, so würde P.D. folgen.

Problem: geeignete Wahl von σ^* für jedes σ.

Wenn M orientierbar, dann geht das.

Seien die Ecken von K angeordnet. Betrachte die Abb.

$$\chi : C(K') \longrightarrow C(K)$$

$$s(\hat{\sigma}_0 \ldots \hat{\sigma}_i) \longmapsto s(v_{\sigma_0}, \ldots, v_{\sigma_i}), \quad v_\sigma \text{ erste Ecke von } \sigma$$

Falls $v_{\sigma_i} = v_{\sigma_j}$ fassen wir $s(v_{\sigma_0}, \ldots v_{\sigma_i})$ als null auf.

Satz:

χ ist eine Kettenhomotopieäquivalenz.

Bekomme Abb

$$\chi^* : Hom(C(K), \mathbb{Z}) \to Hom(C(K'), \mathbb{Z})$$

Setze nun

$$\gamma(\hat{\sigma}) := \chi^*(\hat{\sigma}) \cap [M]$$

Satz:

$\gamma(\hat{\sigma})$ ist Fundamentalzyklus zu σ, d.h. eine Wahl von σ^*.

Nun gilt

$$\partial \gamma(\hat{\sigma}) = \partial (x^*(\tilde{\sigma}) \cap [M])$$

$$= (-1)^q \, \delta(x^*(\tilde{\sigma})) \cap [M] + x^*(\tilde{\sigma}) \cap \underbrace{\partial [M]}_{=0 \text{ weil } [M] \text{ Fund. Klasse}}$$

$$= (-1)^q \, x^*(\delta\hat{\sigma}) \cap [M]$$

$$= (-1)^q \, \gamma(\delta\hat{\sigma})$$

Dh. (*) kommutiert. (Bis auf evtl. Vorzeichen, was aber immer gleich ist.)

Also folgt Poincaré-Dualität und ebenso, das der Iso durch cap-Produkt mit $[M]$ gegeben ist.