13. (a) Einfache Folgerungen des Poincaré-Dualitätssatzes

<u>Vorbemerkung</u>: Wir hatten schon angemerkt, dass wir $\mathbb{Z}$ für alle Aussagen über Fundamentalklasse und Dualitätsisom. durch einen komm. Ring R mit 1 ersetzen können, da es genau einen Ringhomom. $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ gibt, der 1 auf 1 abbildet. Sobald wir Künneth-Sätze oder univ. Koeff.-theoreme benutzen, muss R ein Hauptidealring sein.

Nehmen wir $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so finden wir in jedem Fall eine eindtg. bestimmte Fundamentalklasse $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z}_2)$, da $H_n(M, M\setminus\{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, es also genau ein Erz. von $H_n(M, M\setminus\{x\}; \mathbb{Z}_2)$ gibt. Damit haben beliebige Mannigfaltigkeiten eindeutig bestimmte Fundamentalklassen μ_K in $H_n(M, M\setminus K; R)$, wenn $1+1=0$ in R gilt.

Die folgenden Ergebnisse lassen sich daher mit allgemeinen Ringen R und R-Moduln formulieren. Der kürzeren Formulierungen wegen verzichten wir darauf.

|| Im folgenden sind alle Koeff. in $\mathbb{Z}$, es sei denn etwas anderes wird explizit hingeschrieben (Dann fast immer $\mathbb{Z}_2$.)

1. M sei zshgd und nicht kompakt. Dann ist $H_n(M) = 0$.

Beweis: Ist M orientierbar, so ist $H_n(M) \cong H^0_c(M)$

0-Koketten sind einfach Abbildungen $M \to \mathbb{Z}$. 0-Kozykel sind f mit $f(a)=f(b)$, falls a und b in M durch einen Weg verbunden werden können. Also sind in unserem Fall 0-Kozykel konstante Abb. $f: M \to \mathbb{Z}$. Aber unter den konst. Abb. hat nur die 0 kompakten Träger. Also ist $H^0_c(M) = 0$.

Ist M nicht orientierbar, so folgt mit denselben Schlüssen: $H_n(M;\mathbb{Z}_2) = 0$; wegen des univ. Koeff.-theorems ist somit $H_n(M) \otimes \mathbb{Z}/2 \cong H_n(M)/_{2 \cdot H_n(M)} = 0$

Nun sei $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$ die Orientierungsüberlagerung. Da M zshgd. und nicht or.-b. ist, ist $\tilde{M}$ zshgd.

Also ist $H_n(\tilde{M}) = 0$. Betrachte den Umkehrhomom.

$$C_*(M) \xrightarrow{\tau} C_*(\tilde{M})$$

$\sigma: \Delta^i \to M$ besitzt genau 2 Lifts $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 : \Delta^i \to \tilde{M}$

Setze $\tau(\sigma) = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$. Dies ist eine Kettenabb., und $C(p) \circ \tau : C_*(M) \to C_*(M)$ ist Multiplikation mit 2. Da $H_n(\tilde{M}) = 0$ ist, gilt für jedes $z \in H_n(M)$, dass $2 \cdot z = 0$ ist. Also ist $H_n(M) = H_n(M) \otimes \mathbb{Z}/2$. $\square$

2. Es sei M kompakt (und zshgd.). Dann gilt

M ist genau dann orientierbar, wenn $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $H_n(M) \neq 0$ ist.

<u>Bew.</u> Klar. $z \in H_n(M)$ ist genau dann 0, wenn $\rho_x(z) \in H_n(M)$ für alle $x \in M$ 0 ist. Sei $z \neq 0$

$\Rightarrow \exists x$ und $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, mit $\rho_x(z) = k \cdot \nu_x$ für eine lokale Orientierung ν_x. Wir wissen, dass es kompakte Umgebung K von x mit $H_n(M, M \setminus K) \xrightarrow[\cong]{\rho_x} H_n(M, M \setminus x)$ gibt. Also ist

$$\{ y \in M : \exists \text{ lok. Or. } \nu_y \text{ mit } \rho_y(z) = k \cdot \nu_y \}$$

offen und abgeschlossen, also ganz M. Diese ν_y, $y \in M$, sind damit eine Orientierung und $z = k \cdot [M]$, da

$\rho_y(z - k[M]) = 0 \quad \forall y \in M$.

<u>2a</u>: Insbesondere ist $H_n(M) = 0$, wenn M zshgd und nicht orientierbar ist.

3. Ist M kompakt, so ist M genau dann orientierbar, wenn $H_{n-1}(M)$ frei ist.

Ist M nicht orientierbar, zshgd + kompakt, so enthält $H_{n-1}(M)$ genau einen zu $\mathbb{Z}_2$ isomorphen direkten Summanden.

<u>Beweis</u>: Wir setzen voraus, dass $H_i(M)$ endlich erzeugt ist für alle i. Das folgt aus der

Tatsache, dass M als Retrakt einer Umgebung E in einem $\mathbb{R}^N$ eingebettet werden kann. Da M kompakt ist, kann diese Umgebung als endliche Vereinigung runder offener Bälle gewählt werden. Deren Homologiegruppen sind (nutze Mayer-Vietoris) endlich erzeugt, und $H_i(M)$ ist Bild von $H_i(E) \longrightarrow H_i(M)$ unter der Retrakt abb.

Ist M orientierbar und kompakt, so ist

$H_{n-1}(M) \cong H^1(M)$ und univ. Koeff. ergeben exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}(H_0(M), \mathbb{Z})}_{\substack{\cong \\ \mathbb{Z} \\ 0}} \to H^1(M) \xleftarrow{\text{ist } \cong} \to \underbrace{\mathrm{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z})}_{\text{frei}} \to$$

Ist M nicht orientierbar, so ist $H_n(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $H_n(M) = 0$. Exaktheit von

$$0 \to \underset{=0}{H_n(M) \otimes \mathbb{Z}_2} \longrightarrow \underset{\cong \mathbb{Z}_2}{H_n(M; \mathbb{Z}_2)} \longrightarrow H_{n-1}(M) * \mathbb{Z}_2 \to 0$$

zeigt, dass $H_{n-1}(M)$ genau ein Element der Ordnung 2 besitzt. Ist dies kein direkter Summand, so gibt es ein Elt. x der Ordnung $2k$, $k > 1$.

Aber $0 \to \underset{=0}{H_n(M) \otimes \mathbb{Z}_{2k}} \to H_n(M; \mathbb{Z}_{2k}) \to H_{n-1}(M) * \mathbb{Z}_{2k} \to 0$

zeigt, dass dann $H_n(M; \mathbb{Z}_{2k}) \neq 0$ ist. In $\mathbb{Z}_{2k}$ ist $1 + 1 \neq 0$, also wäre M doch orientierbar. $\square$

4. Ist M orientierbar, kompakt und zshgd.

so sind $\dfrac{H^i(M)}{\operatorname{Tor} H^i(M)}$ und $\dfrac{H^{n-i}(M)}{\operatorname{Tor} H^{n-i}(M)}$

unter dem Cup-Produkt duale Paare.

Beachte: $-\cup- : H^i(M) \otimes H^{n-i}(M) \longrightarrow H^n(M) \cong \mathbb{Z}$

$-\cup-$ verschwindet auf $\operatorname{Tor} H^i(M) \otimes H^{n-i}(M) +$

$H^i(M) \otimes \operatorname{Tor} H^{n-i}(M)$,

induziert somit einen Homomorphismus

$$-\cup- : \frac{H^i(M)}{\operatorname{Tor} H^i(M)} \otimes \frac{H^{n-i}(M)}{\operatorname{Tor} H^{n-i}(M)} \longrightarrow H^n(M)$$

Die Behauptung ist:

$\exists\ \xi_1, \dots, \xi_k \in H^i(M)$ und

$\eta_1, \dots, \eta_k \in H^{n-i}(M)$

die Basen von $H^i(M)/\operatorname{Tor} H^i(M)$ bzw.

$H^{n-i}(M)/\operatorname{Tor} H^{n-i}(M)$

repräsentieren mit

$$(\xi_s \cup \eta_t)([M]) = \delta_{st}$$

(Es gibt daher viele nicht-triviale Cup-Produkte)

4a. Dasselbe gilt für beliebige $\overset{\text{komp. zshgde}}{M}$ und $\mathbb{Z}_2$-Koeff.

$H^i(M;\mathbb{Z}_2) \cup H^{n-i}(M;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{-\cup-} H^n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$

ist eine duale Paarung.

<u>Beweis:</u> Das univ.-Koeff.-thm zeigt

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{\ell}(M), \mathbb{Z}) \to H^{\ell}(M) \to \mathrm{Hom}(H_{\ell}(M), \mathbb{Z}) \to 0$$

dass wir $\dfrac{H^{\ell}(M)}{\mathrm{Tor}\, H^{\ell}(M)}$ mit $\mathrm{Hom}(H_{\ell}(M), \mathbb{Z})$ identifizieren können. Jeder Homom. $f: H_{\ell}(M) \to \mathbb{Z}$ bildet $\mathrm{Tor}\, H_{\ell} M$ nach 0 ab. $\dfrac{H_{\ell}(M)}{\mathrm{Tor}\, H_{\ell}(M)}$ ist frei abelsch.

Wir finden deshalb zu einer Basis $z_1, \dots, z_r$ von $H_{\ell}(M)/\text{Torsion}$ eine Basis $\xi_1, \dots, \xi_r$ von $H^{\ell}(M)/\text{Torsion}$ mit $\xi_i(z_j) = \delta_{ij}$.

$- \cap [M] : H^i(M) \to H_{n-i}(M)$ induziert einen Isom., den wir wieder mit $- \cap [M]$ bezeichnen

$$\frac{H^i(M)}{\text{Torsion}} \longrightarrow \frac{H_{n-i}(M)}{\text{Torsion}}$$

Wähle nun Basis $z_1, \dots, z_r$ von $H_{n-i}(M)/\text{Torsion}$ und die duale Basis $\xi_1, \dots, \xi_r$ von $H^{n-i}(M)/\text{Torsion}$.

Weiter seien $\eta_1, \dots, \eta_r$ die Elemente von $H^i(M)/\text{Torsion}$, die auf $z_1, \dots, z_r$ unter $- \cap [M]$ abgebildet werden. Dann gilt

$$(\xi_i \cup \eta_j)([M]) = (\xi_i \cup \eta_j) \cap [M]$$

$$= \xi_i \cap (\eta_j \cap [M]) =$$

$$= \xi_i \cap z_j = \xi_i(z_j) = \delta_{ij} \qquad \square$$

<u>Bem.</u> Hier haben wir eine duale Paarung $H^{n-i}/_{\mathrm{Tor}} \otimes H^i/_{\mathrm{Tor}} \to R$ produziert.
Das macht aber nichts, da dies für alle $0 \le i \le n$ klappt

Der gleiche Beweis läuft mit $\mathbb{Z}_2$-Koeff. Wir müssen hier aber nicht auf Torsion achten.

<u>Anwendung:</u> Kohomologiering von $\mathbb{R}P^n$.

Wir wissen $H^i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2 \quad 0\le i\le n$.

Poincaré-Dualität liefert somit

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)\otimes H^{n-i}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{-\cup-} & H^n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \\ \mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ \cong \mathbb{Z}_2 & & \end{array}$$

ist ein Isom. Weiter ist für $i\le k\le n$

$$H^i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^i(\mathbb{R}P^k;\mathbb{Z}_2)$$

ein Iso. (Abb. durch $\mathbb{R}P^k\hookrightarrow\mathbb{R}P^n$ induziert)

Also ist für alle $i<k\le n$

$$H^i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)\otimes H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{-\cup-} H^{i+1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$$

ein Isom. Insbesondere ist (Beweis durch Induktion) $u^i\in H^i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ für $1\le i\le n$ der Erzeuger von $H^i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$, wenn u der Erzeuger von $H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ ist.

Analog sieht man, dass u^i ein Erz. von $H^{2i}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ ist, wenn $u\in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ ein Erzeuger ist. $(1\le i\le n)$. $\square$