12. Poincaré-Dualität topologisch

1. Slant und Cap-Produkt. (Kurz)

C, D Kettenkomplexe über R, M, N R-Moduln

$$E: \operatorname{Hom}(D,M) \otimes C \otimes D \otimes N \longrightarrow C \otimes M \otimes N$$

$$E(f \otimes c \otimes d \otimes n) = (-1)^{|f| \cdot |c|} \quad c \otimes f(d) \otimes n$$

(Im folgenden betrachten wir eigentlich nur den Fall $M = N = R$)
und wir identifizieren $C \otimes_R R \otimes_R R$ mit C

E ist Kettenabb., sodass wir unter Verschalten von α einen Homom.

$$H^i(D;M) \otimes H_n(C \otimes D \otimes N) \xrightarrow{\alpha} H_{n-i}(\operatorname{Hom}(D,M) \otimes C \otimes D \otimes N) \xrightarrow{E_*}$$

$$H_{n-i}(C \otimes M \otimes N)$$

erhalten.

$$\xi^i \otimes z_n \longmapsto \xi^i \backslash z_n \qquad \xi^i \text{ slant } z_n$$

Topologisch: $D = C(Y,B)$, $C = C(X,A)$;
$\{A \times Y, X \times B\}$ in $X \times Y$ exzisiv erhalten wir mit Hilfe der Kettenhomotopieäquivalenz

$$C((X,A) \times (Y,B) \otimes N) \xrightarrow{AW} C(X,A) \otimes C(Y,B) \otimes N$$

das Kohomologieslantprodukt

$$H^i(Y,B;M) \otimes H_n((X,A) \times (Y,B); N) \xrightarrow{-\backslash -} H_{n-i}(X,A; M \otimes N)$$

~~Die~~ gewisse Regeln sind erfüllt. Einige stehen auf S. 10.9.

Uns interessiert die innere Version davon, indem wir die Diagonalabb. vorschalten. Also hier

$D = C(X,B)$, $C = C(X,A)$ $\{A,B\}$ exzisiv in X
z.B. $A=\emptyset$ oder $B=\emptyset$

$$C^i(X,B;M) \otimes \frac{C_n(X)}{C_n\{A,B\}} \otimes N \xrightarrow{id \otimes C_n(\Delta) \otimes id}$$

$$C^i(X,B;M) \otimes \left(C(X,A) \otimes C(X,B)\right)_n \otimes N \xrightarrow{AW \circ \alpha}$$

$$C_{n-i}(X,A) \otimes M \otimes N$$

liefert

$$H^i(X,B;M) \otimes H_n(X,A\cup B;N) \xrightarrow{-\cap-} H_{n-i}(X,A;M\otimes N)$$

das sogenannte Cap-Produkt.

(i) Es ist natürlich (wir unterdrücken ab jetzt die Koeffizienten)

$$f:(X,A,B) \longrightarrow (X',A',B')$$

$\xi' \in H^i(X',B')$, $z \in H_n(X,A\cup B)$. Dann ist

$$f_*(f^*(\xi') \cap z) = \xi' \cap f_*(z) \quad \text{in } H_{n-i}(X',A').$$

(ii) Assoziativ. $A,B,C \subset X$; alle nötigen Exzisivitätsannahmen gemacht (z.B. A,B,C offen)
$\xi \in H^i(X,B)$, $\eta \in H^j(X,C)$, $z \in H_n(X, A\cup B\cup C)$
Dann ist
$$(\xi \cup \eta) \cap z = \xi \cap (\eta \cap z) \text{ in } H_{n-i-j}(X,A).$$

(iii) 1-Element $1 \frown z = z$,

$z \in H_n(X,A)$, $1 \in H^0(X)$ das 1-Element

(ist auch das 1-Element des Kohomologierings $H^*(X)$)

(iv) Multiplikativ:

$$(\xi \times \xi') \frown (z \times z') = (-1)^{|\eta||z|} (\xi \frown z) \times (\eta \frown z')$$

$\xi \in H^*(X,B)$, $\xi' \in H^*(X',B')$,

$z \in H_*(X, A \cup B)$, $z' \in H_*(X', A' \cup B')$

Gleichung in $H_*((X,A) \times (X',A'))$.

Hier die explizite Formel auf dem Kettenniveau für $\frown$

$f : C_i(X) \longrightarrow M$, $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$

$$f \frown \sigma = (-1)^{i(n-i)} \sigma\{0,\dots,n-i\} \otimes f(\sigma\{n-i,\dots,n\})$$

$$\in C_{n-i}(X) \otimes M.$$

Kohomologie mit kompakten Träger.

M bleibt im folgenden eine n-Mannigf., obwohl Kohomologie mit kompaktem Träger auch in allgemeineren Situation Sinn macht. Eine Kokette

$$f : C_i(M) \longrightarrow R$$

hat kompakten Träger, wenn es ein kompaktes $K \subset M$ gibt, so dass $f \in C^i(M, M \setminus K)$ ist, f also auf jedem ganz in $M \setminus K$ liegendem sing. i-Simplex den Wert 0 hat.

Ist $f \in C^i(M, M \setminus K)$, so ist auch $\delta f \in C^{i+1}(M, M \setminus K)$, so dass die Koketten mit kompaktem Träger einen Unterkomplex

$C_c^*(M)$ von $C^*(M) = \mathrm{Hom}(C(M), R)$ bilden.

Dessen i-te Kohomologiegruppe bezeichnen wir mit

$$H_c^i(M)$$

<u>Bem.</u> Ist M kompakt, so ist $C_c^*(M) = C^*(M)$, also

$H_c^i(M) = H^i(M)$.

Damit wir ein wenig mit $H_c^i(M)$ umgehen lernen. Ist $\xi \in H_c^i(M)$, so existiert ein kompaktes K und $f : C_i(M, M \setminus K) \longrightarrow R$ mit $\xi = [f]_c$. Ist $f' : C_i(M, M \setminus K') \longrightarrow R$ ein weiterer Repräsentant von ξ, so existiert K'' und

$g : C_{i-1}(M, M \setminus K'') \to R$ mit $\delta g = f - f'$

$f, f', g' \in C^*(M, M \setminus (K \cup K' \cup K''))$.

f, f' repräsentieren Kohomologieklassen $[f] \in H^i(M, M \setminus K)$, $[f'] \in H^i(M, M \setminus K')$, deren Bild in $H^i(M, M \setminus (K \cup K' \cup K''))$ übereinstimmen.

Anders formuliert:

zu ξ gibt es $K \subset M$ kompakt und $\xi_K \in H^i(M, M \setminus K)$,

das ξ repräsentiert.

$\xi_K \in H^i(M, M\setminus K)$ und $\xi_{K'} \in H^i(M, M\setminus K')$

repräsentieren dasselbe Elt. von $H^i_c(M)$, falls es ein kompaktes $L \subset M$ gibt mit $K \cup K' \subset L$ und

$\varrho^{*L}_{K}(\xi_K) = \varrho^{*L}_{K'}(\xi_{K'})$, wobei $\varrho^{*L}_{L'} : H^*(M, M\setminus L') \to H^*(M, M\setminus L)$

für $L' \subset L$ durch die Inkl. $(M, M\setminus L) \longrightarrow (M, M\setminus L')$ induziert wird.

Bem. In der Algebra schreibt man dann

$$H^i_c(M) = \varinjlim_{\substack{K \subset M \\ \text{kompakt}}} H^i(M, M\setminus K)$$

und nennt die rechte Seite den direkten Limes oder auch Kolimes der gerichteten Familie $\left(H^i(M, M\setminus K), \varrho^L_K\right)_{K \subset L \subset M \text{ kompakt}}$.

Beispiel: (a) $H^0_c(\mathbb{R}^n) = 0$ für $n > 0$. Denn ein $f : C_0(\mathbb{R}^n) \to R$ ist genau dann ein Kozykel, wenn f auf jedem 0-Simplex denselben Wert hat. Dann hat f aber nicht kompakten Träger. Etwas allgemeiner: X wegzshgd und nicht kompakt $\Rightarrow H^0_c(X) = 0$.

(b) $H^n_c(\mathbb{R}^n) \cong R$. Denn zu jeder kompakten ~~Menge~~ Menge K ex. r mit $B_r(0) \supset K$.

$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_r(0)) \cong R$ und für jedes $r' \geq r$ ist

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_r(0)) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_{r'}(0))$$ ein

Isomorphismus, da $\mathbb{R}^n \setminus B_{r'}(0) \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$ eine Homotopieäquivalenz ist. Speziell gilt hier:

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\cong} H^n_c(\mathbb{R}^n).$$

__Poincaré dualitätsabbildung:__

Dies wird eine Abbildung

$H^i_c(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{PD} H_{n-i}(M;\mathbb{Z})$, wobei M orientiert ist
(wir dürfen natürlich jeden komm. Ring R mit 1 einsetzen, da es genau eine Ringabb. $\mathbb{Z} \to R$ mit $1 \mapsto 1$ gibt)

Sei $\xi \in H^i_c(M)$ repräsentiert durch $[f] \in H^i(M, M \setminus K)$

Dann ist $[f] \cap \mu_K \in H_{n-i}(M)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Denn es sei $K \subset K'$. Dann ist wegen der Natürlichkeit von $-\cap-$ und der Tatsache, dass

$$\varrho^{K'}_K(\mu_{K'}) = \mu_K$$ und somit

$$(\varrho^{*K'}_K([f]) \cap \mu_{K'}) = [f] \cap \varrho^{K'}_K(\mu_{K'}) = [f] \cap \mu_K.$$

Hier betrachten wir die Abb.

$$(\overset{A}{M}; \overset{B}{\emptyset}, \overset{C}{M\setminus K'}, M\setminus K') \subset (M; \emptyset, M\setminus K, M\setminus K)$$

so dass wir nach Anwenden des Cap-Produkts jeweils in $H_{n-i}(M,\emptyset)$ landen.

<u>Poincaré-Dualitätssatz:</u> Es sei M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist für alle i

$$H^i_c(M) \xrightarrow{PD} H_{n-i}(M)$$

ein Isomorphismus. Ist insbesondere M kompakt, so ist

$$H^i(M) \xrightarrow{-\cap [M]} H_{n-i}(M)$$

ein Isomorphismus.

<u>Beweis:</u> Wieder nach bewährtem Schema.

1. Fall $\quad M=\mathbb{R}^n$

$$H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B_r(0)) = \begin{cases} 0 & i\neq n \\ \mathbb{Z}\ (\text{oder } R) & i=n \end{cases}$$

und $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B_r(0)) \xrightarrow{\cong} H^i_c(\mathbb{R}^n)$

$$H_i(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Müssen also testen

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B_r(0)) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{R}^n) \\ \xi & \longmapsto & \xi \cap \mu_{B_r(0)} \end{array}$$

ist ein PD. Aber aus dem univ. Koeff.-theorem folgt
$(B = B_r(0))$

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B), \mathbb{Z})$$

und $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ mit μ_B als Erzeugendem. Es sei ξ das Elt., das μ_B auf 1 abbildet, dann ist

$$\xi \cap \mu_B = \langle \xi, \mu_B \rangle \cdot 1$$ wobei 1 ein durch ein sing. 0-Simplex des $\mathbb{R}^n$ repräsentierte Erz. von $H_0(\mathbb{R}^n)$ ist.

2. Schritt. (Mayer-Vietoris)

$M = U \cup V$, U, V offen in M, PD sei ein PD. für $U, V, U \cap V$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\xrightarrow{\delta} H^i_c(U \cap V) & \longrightarrow & H^i_c(U) \oplus H^i_c(V) & \longrightarrow & H^i_c(M) & \xrightarrow{\delta} \\
\downarrow PD & & \downarrow PD \oplus PD & & \downarrow PD & \\
\xrightarrow{\partial} H_{n-i}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-i}(U) \oplus H_{n-i}(V) & \longrightarrow & H_{n-i}(M) & \longrightarrow
\end{array}$$

wobei wir die obere exakte Sequenz als direkten Limes von

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H^i(U \cap V, U \cap V \setminus K \cap L) & \to & H^i(U, U \setminus K) \oplus H^i(V, V \setminus L) & \to & H^i(M, M \setminus K \cup L) & \to \\
\downarrow - \cap \mu_{K \cap L} & & \downarrow - \cap \mu_K \oplus - \cap \mu_L & & \downarrow \cap \mu_{K \cup L} & \\
H_{n-i}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-i}(U) \oplus H_{n-i}(V) & \longrightarrow & H_{n-i}(U \cup V) & \to
\end{array}$$

erhalten. Die obere Sequenz kommt per Ausschneidung aus der Standard M.-V. Sequenz

zu $(M, M\setminus K\cap L)$, $(M, M\setminus K)$, $(M, M\setminus L)$, $(M, M\setminus K\cup L)$

und Exaktheit bleibt beim Übergang zum direkten Limes erhalten (bitte selbst prüfen).

Also folgt die Aussage aus dem 5er-Lemma.

3. Schritt A sei wohlgeordnete Menge

$$M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \quad \text{mit} \quad U_\alpha \subset U_{\alpha'}, \text{ falls } \alpha \leq \alpha'.$$

Der Satz gelte für alle U_α. Dann gilt er für M.

Denn jede kompakte Menge liegt in einem der U_α und für $K\subset U_\alpha$ ist

$$H^i(M, M\setminus K) \xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H^i(U_\alpha, U_\alpha\setminus K)$$

Da $H_{n-i}(M)$ der direkte Limes der $H_{n-i}(U_\alpha)$ ist (jede Kette und jeder Rand einer Kette liegen in einem kompakten Teilraum von M) und PD für alle U_α ein Iso ist, ist PD auch für M ein Iso.

4. Schritt. $M\subset\mathbb{R}^n$ offen. Ist M konvex, so ist $M\cong\mathbb{R}^n$. Wir sind im Schritt 1. Ist M endl. Vereinig. offener konvexer Mengen, so liefert der 2. Schritt das Ergebnis. Allgemein ist M abzählbare Ver. solcher Mengen. Schritt 3 liefert jetzt das Ergebnis

5. Schritt M beliebig. Nach Definition ist

M überdeckt durch offene Teilmengen V_x, die zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöo. sind und wir

können wie eben schließen