# 11. Mannigfaltigkeiten 1
# Fundamentalklasse

## 1. Homologie in Dimension $\geq$ dim Mannigfaltigkeit

Im folgenden sei $M$ eine nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n$. Für Teilmengen $L \subset K \subset M$ bezeichnen wir mit

$$\rho_L^K : H_n(M, M \setminus K) \longrightarrow H_n(M, M \setminus L)$$

die von der Inklusion induzierte Abbildung. Insbesondere ist für $L \subset K \subset J \subset M$ $\rho_L^J = \rho_K^J \circ \rho_L^K$.

Ist $K$ fest, so schreiben wir auch einfacher $\rho_L$. Für $x \in K$ schreiben wir dann $\rho_x$ anstelle von $\rho_{\{x\}}$.

Unser erstes Ziel ist

<u>Proposition:</u> Es sei $K \subset M$ kompakt. Dann gilt

(i) $H_i(M, M-K; R) = 0 \quad i > n$

(ii) Ein Element $z \in H_n(M, M-K; R)$ ist genau dann $0$, wenn für alle $x \in K$

$\rho_x(z) = 0$.

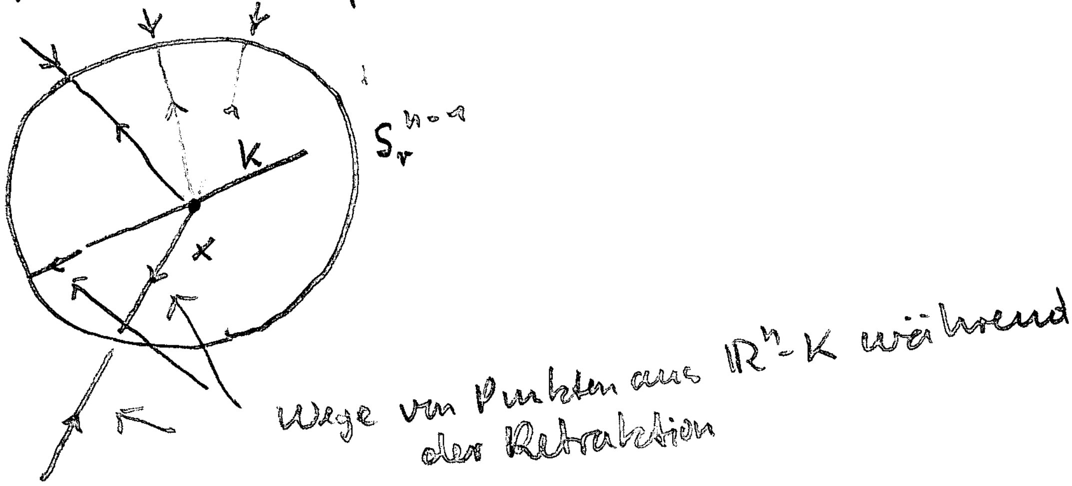
(<u>Bem.</u> Ist $z \neq 0$, so ex. damit $x \in K$ mit $\rho_x(z) \neq 0$ in $H_n(M, M \setminus x) \cong R$. Insbesondere ist damit für $r \neq 0$ auch $r \cdot z \neq 0$. Also ist $H_n(M, M-K; R)$ torsionsfrei)

<u>Beweis:</u> Dies ist ein Standardverfahren. Man sieht sich die Situation in einfachen Fällen an und benutzt dann Mayer-Vietoris, um immer allgemeinere Situationen in den Griff zu bekommen.

Wir gehen in 6 Schritten vor.

1\. Schritt $M = \mathbb{R}^n$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt und konvex.

Es sei $B^n_r$ der abgeschlossene n-Ball um $x$ mit Radius $r$. Wähle $r$ so groß, dass $K$ im Innern von $B_r$ liegt. $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ enthält die Randsphäre $S^{n-1}_r$ von $B^n_r$ als Deformationsretrakt. Die Einschränkung der Deformationsretraktion auf $\mathbb{R}^n \setminus K$ zeigt, dass $S^{n-1}_r \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ eine Homotopieäquivalenz ist. (Hier benutzen wir, dass $K$ konvex ist, so dass während der Standardretraktionsdeformation Punkte im Komplement von $K$ auch dort bleiben)




Aussage (i) folgt damit aus der exakten Sequenz des Paares, und Aussage (ii) folgt aus den exakten Sequenzen der Paare $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$, $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ und der Tatsache, dass in

$$\begin{tikzcd} S^{n-1}_r \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & \mathbb{R}^n \setminus K \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \end{tikzcd}$$

$\alpha$ und $\beta$ Homotopieäquiv. sind

$$\begin{tikzcd}
0 = \tilde{H}_n(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\varrho_x"] & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 = \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n) \\
0 = \tilde{H}_n(\mathbb{R}^n) \arrow[r] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \arrow[r, "\cong"] & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \arrow[r] & 0 = \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

Also ist $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \xrightarrow{\varrho_x} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ für alle $x \in K$ ein Isomorphismus.

2. Schritt. Mayer-Victoris-Argument.
$M$ sei nun beliebig; $K = K_1 \cup K_2$, $K_i \subset M$ kompakt und die Proposition gelte für die kompakten Mengen $K_1, K_2$ und $K_1 \cap K_2$. Beh. Dann gilt sie auch für $K$. Da $M \setminus K_i$, $i = 1, 2$, offen in $M$ sind, können wir Mayer-Vietoris anwenden (relative Version)

$$\dots \to H_{i+1}(M, M \setminus (K_1 \cap K_2)) \xrightarrow{\partial} H_i(M, M \setminus (K_1 \cup K_2)) \to H_i(M, M \setminus K_1) \oplus H_i(M, M \setminus K_2) \to \dots$$

Ist $i > n$, so sind nach Ann. die Gruppen links und rechts (beide Summanden) 0, also auch der mittlere Term. Ist $i = n$, so ist die Gruppe links 0, also die 2. Abb. injektiv. Also ist $z \in H_n(M, M \setminus (K_1 \cup K_2))$ gleich 0 genau dann, wenn $\varrho_{K_1}(z)$ und $\varrho_{K_2}(z)$ verschwinden. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\varrho_x(z) = 0$ ist für alle $x \in K_1$ und alle $x \in K_2$.

3. Schritt $M = \mathbb{R}^n$ und $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$ mit $K_i$ kompakt und konvex. Dann beweist man die Aussage der Prop. durch Induktion nach $r$.

Induktionsanfang bei $r=1$ mit Schritt 1.

Induktionsschritt.

Aussage richtig für $r = k-1 \geq 1$.

Betrachte nun $L_1 = K_1 \cup \dots \cup K_{k-1}$, $L_2 = K_k$.

Dann ist $L_1 \cap L_2 = (K_1 \cup \dots \cup K_{k-1}) \cap K_k$

$$= (K_1 \cap K_k) \cup \dots \cup (K_{k-1} \cap K_k)$$

Vereinigung von $k-1$ konvexen Mengen. Also gilt die Prop. für $L_1$ und $L_1 \cap L_2$ nach Ind.ann. für $L_2$ nach Schritt 1. Also gilt die Prop für $L_1 \cup L_2 = K_1 \cup \dots \cup K_k$ nach Schritt 2.

4. Schritt $M = \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (sonst beliebig)

Sei $z \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$, $z = [c_i]$,

$c_i \in C_i(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial c_i \in C_{i-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)$. Da die Bilder aller sing. $(i-1)$-Simplices von $\partial c_i$ positiven Abstand haben, finden wir $\varepsilon > 0$ und eine endl. Zahl von $\varepsilon$-Kugeln $B_\varepsilon(x_k)$, $1 \leq k \leq r$,

so dass $K \subset \bigcup_{k=1}^{r} \mathring{B}_\varepsilon(x_k)$ und $\partial c_i \in C_{i-1}\left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{r} B_\varepsilon(x_k)\right)$

D.h. dass $z$ im Bild von

$$H_i\left(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{r} (B_\varepsilon(x_k))\right) \longrightarrow H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$$

liegt. Ist $i > n$, so ist die linke Gruppe nach Schritt 3 $0$, also $z = 0$. Ist $i = n$ und $z \neq 0$ und $z' \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{r} (B_\varepsilon(x_k)))$ mit

$\rho_K(z') = z$, so ist $z' \neq 0$ und somit ex. $k$ und $x' \in B_\varepsilon(x_k)$ mit $\rho_{x'}(z') \neq 0$, wegen Schritt 3. Wir dürfen annehmen, dass $x \in K$ existiert mit $x \in \mathring{B}_\varepsilon(x_k)$ (andernfalls können wir $B_\varepsilon(x_k)$ weglassen beim Überdecken von $K$. Wie im 1. Schritt sieht man, dass $\rho_x : H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_k)) \to H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$ ein Isom. ist, $\rho_{B_\varepsilon(x_k)}(z') \neq 0$, da $\rho_{x'}(z') \neq 0$. Also ist $\rho_x(z') \neq 0$. Aber $\rho_x(z') = \rho_x(z)$, da $x \in K$. Also ist $\rho_x(z) \neq 0$.

5. Schritt. $M$ beliebig und $K \subset M$ klein genug, so dass $K \subset U \subset M$ und $U$ homöomorph zum $\mathbb{R}^n$. Dann ist $(U, U \setminus K) \hookrightarrow (M, M \setminus K)$ eine Ausschneidung und die Prop. folgt aus dem 4. Schritt

<u>Letzter Schritt:</u> $K \subset M$ kompakt, $M$ beliebig.

Dann gibt es $K_1, \ldots, K_r$ mit $K = K_1 \cup \cdots \cup K_r$ und jedes $K_k$ liegt in einer zum $\mathbb{R}^n$ homöomorphen Umgebung. Nun beweise durch Induktion nach $r$.

Beachte $(K_1 \cup \cdots \cup K_{\ell-1}) \cap K_\ell = (K_1 \cap K_\ell) \cup \cdots \cup (K_{\ell-1} \cap K_\ell)$ ist Vereinigung von $(\ell-1)$ komp. Mengen, die in einer zum $\mathbb{R}^n$ homöomorphen Umgebung liegen. Also funktioniert der Ind.schritt. Ind. Anfang ist Schritt 5 $\square$

## 2. Orientierbarkeit und Fundamentalklasse

Aus den Übungen kennen wir den Begriff der

<u>Lokalen Orientierung einer n-dim Mannigf. $M$ im Punkt $x \in M$.</u>

Das ist ein Erzeuger von $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Es gibt also zwei davon.

Eine <u>Orientierung</u> der n-Mfg $M$ ist eine Familie

$\vartheta = \{ \vartheta_x \in H_n(M, M \setminus x; \mathbb{Z}) \}_{x \in M}$ von lokalen Orientierungen von $M$, die im folgenden Sinne stetig sind:

$\forall x \in M$ ex. eine Umgebung $U$ von $x$ und ein Element $\vartheta_U \in H_n(M, M \setminus U)$, so dass $\varrho_y(\vartheta_U) = \vartheta_x$ ist für alle $y \in U$.

Besitzt $M$ eine Orientierung, so heißt $M$ <u>orientierbar</u>.

<u>Bemerkung:</u> Ist $\vartheta = \{\vartheta_x\}_{x \in M}$ eine Orientierung und ist $N \subset M$ eine Wegkomponente von $M$, so ist auch $\vartheta_N^- := \{ \vartheta_x : x \in M \setminus N \} \cup \{ -\vartheta_x : x \in N \}$ eine Orientierung. Hat also $M$ $k$ Wegkomponenten, so besitzt es keine oder $2^k$ Orientierungen. $M$ ist genau dann orientierbar, wenn jede Wegkomponente von $M$ orientierbar ist.

Beachte: Bei Mannigfaltigkeiten sind Komponenten und Wegkomponenten dasselbe.

<u>Definition</u>: Eine $n$-Mannigfaltigkeit $M$ zusammen mit einer Orientierung $o$ heißt orientierte Mannigfaltigkeit.

<u>Satz:</u> $(M, o)$ sei orientierte $n$-Mfg und $K \subset M$ kompakt. Dann gibt es genau eine Klasse $\mu_K \in H_n(M, M-K)$, so dass $\varrho_x(\mu_K) = o_x$ ist f.a. $x \in K$. (Ist $M$ selbstkompakt, so heißt $\mu_M$ die <u>Fundamentalklasse</u> von $(M, o)$ und wird oft mit $[M]$ bezeichnet (wobei die Orientierung mitzudenken ist.)

<u>Beweis</u>: <u>Eindeutigkeit</u> ist klar: sind $\mu_K$ und $\nu_K$ zwei solcher Klassen, so ist $\varrho_x(\mu_K - \nu_K) = o_x - o_x = 0$ für alle $x \in K$. Also ist $\mu_K - \nu_K = 0$ nach Proposition aus Teil 1.

<u>Existenz</u>:

Dies geht wieder nach bewährtem Muster.

Zunächst gibt es nach Definition zu jedem $x \in M$ eine Umgebung $U_x$ und ein Element $o_{U_x} \in H_n(M, M-U)$ mit $\varrho_y(o_{U_x}) = o_y$, $y \in U_x$.

Also

1. Schritt: Liegt $K$ in einem $U_x$, so existiert $\mu_K$

2. Schritt (Mayer-Vietoris): $K = K_1 \cup K_2$ und es existiert $\mu_{K_1}, \mu_{K_2}, \mu_{K_1 \cap K_2}$. Betrachte wie in Abschnitt 11.1 die M.-V. Sequenz von $(M, M-K_1)$, $(M, M-K_2)$

$$x \longmapsto (\rho_{K_1}(x), -\rho_{K_2}(x))$$

$$0 \longrightarrow H_n(M, M\setminus K) \longrightarrow H_n(M, M\setminus K_1) \oplus H_n(M, M\setminus K_2) \to H_n(M, M\setminus K_1 \cap K_2) \to$$

$$(x, y) \mapsto \rho_{K_1 \cap K_2}(x) + \rho_{K_1 \cap K_2}(y)$$

Es ist klar, dass $\mu_{K_1 \cap K_2} = \rho_{K_1 \cap K_2}(\mu_{K_i})$, $i = 1, 2$, ist, wegen der Eindeutigkeit von $\mu_{K_1 \cap K_2}$.

Also wird $(\mu_{K_1}, -\mu_{K_2})$ unter der rechten Abb. auf die $0$ abgebildet. Wegen Exaktheit ex. $z \in H_n(M, M\setminus K)$ mit $\rho_{K_1}(z) = \mu_{K_1}$, $\rho_{K_2}(z) = \mu_{K_2}$.

Dann gilt $\forall x \in K_1 \cup K_2$ $\rho_x(z) = \nu_x$, da $x \in K_1$ oder $K_2$. Also ist $z = \mu_K$.

3. Schritt. Da $K$ kompakt ist, existieren $K_1, \dots, K_r$ für die nach Schritt 1 $\mu_{K_i}$ existieren mit $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$. Nun folgt der Satz wegen Schritt 2 mit Induktion.

$\square$