# 10. Produkte 3

## Projektive Räume, Slant- und Cap-Produkt

10.1 Zur Abkürzung der Notation sei $\mathbb{R}^k_0 = (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\})$

<u>Proposition:</u>

$$H^k(\mathbb{R}^k_0 \times \mathbb{R}^l) \otimes H^l(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l_0) \xrightarrow{-\cup-} H^{k+l}(\mathbb{R}^{k+l}_0)$$

ist ein Isomorphismus.

---

Beachte $\mathbb{R}^k_0 \times \mathbb{R}^l = (\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R}^{k+l} \setminus \{0\}^k \times \mathbb{R}^l)$

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l_0 = (\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R}^{k+l} \setminus \mathbb{R}^k \times \{0\}_l)$$

und $\mathbb{R}^{k+l} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^l \cup \mathbb{R}^{k+l} \setminus \mathbb{R}^k \times \{0\}_l = \mathbb{R}^{k+l} \setminus \{0\}$

---

Der Beweis folgt aus dem Spezialfall des Künneth-Satzes für Kohomologie

$$H^k(\mathbb{R}^k_0) \otimes H^l(\mathbb{R}^l_0) \underset{\cong}{\xrightarrow{-\times-}} H^{k+l}(\mathbb{R}^{k+l}_0),$$

da $H^i(\mathbb{R}^k_0) = \begin{cases} R & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

also keine Torsion auftritt und die Homologiegruppen von $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\})$ endl. erzeugt sind. Nutzen wir dann, dass

$$p_k : \mathbb{R}^k_0 \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^k_0, \quad p_l : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l_0 \longrightarrow \mathbb{R}^l_0$$

Homotopieäquivalenzen sind, so folgt die Behauptung aus

$$p_k^*(x) \cup p_\ell^*(y) = x \times y .$$

Alle Exzisivitätsannahmen sind erfüllt, da $\mathbb{R}^k \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^\ell$ offen sind.

Das geom. Bild, das man hier sehen sollte ist, dass sich $\mathbb{R}^k \times \{0\}_\ell$ und $\{0\}_k \times \mathbb{R}^\ell$ in genau einem Punkt transversal schneiden und die Orientierung des $\mathbb{R}^k$ (gegeben durch das Erz. von $H_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus 0)$) und des $\mathbb{R}^\ell$ sich unter $-\times-$ zu einer Orientierung von $\mathbb{R}^{k+\ell}$ verbinden.

10.2 Ringstruktur von $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$ und $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ (Wer möchte darf sich noch den quaternionalen proj. Raum $H^*(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z})$ dazudenken)

Im folgenden sei $P_n$ $\mathbb{R}P^n$ oder $\mathbb{C}P^n$, $d=1$ für $\mathbb{R}P^n$, $d=2$ für $\mathbb{C}P^n$, $R=\mathbb{Z}/2$ für $\mathbb{R}P^n$, $R=\mathbb{Z}$ für $\mathbb{C}P^n$ ($d=4$ für $\mathbb{H}P_n$, $R=\mathbb{Z}$ für $\mathbb{H}P^n$)

Der zelluläre Komplex von $P_n$ mit Koeff. in $R$ hat genau eine Zelle in Dimension $i \cdot d$, $0 \leq i \leq n$ und alle Randabbildungen sind $0$.

Ist $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leq n$

so ist $[x_0, \dots, x_k] \longmapsto [0, \dots, x_0, 0, \dots, x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0]$

wobei $x_j$ rechts an der Stelle $i_j$ steht eine Einbettung $P_k \subset P_n$ und wir können die Zellstruktur für $P_n$ so einrichten, dass die Zellen von $P_k$ Zellen von $P_n$ sind. Es folgt, dass die Einbettung $i : P_k \hookrightarrow P_n$ Isomorphismen

$H(P_n; R) \longrightarrow H(P_k; R)$ für $0 \leq \ \leq dk$

induziert. $(i = (i_0, \dots, i_k))$

Weiter nutzen wir, dass für

$0 \leq j_0 < \cdots < j_{n-k-1} \leq n$ mit

$\{0, \dots, n\} = \{i_0, \dots, i_k\} \cup \{j_0, \dots, j_{n-k-1}\}$

$i(P_k) \subset P_n \setminus j(P_{n-k-1})$ ein starker Deformationsretrakt ist. Betrachte dazu die Retraktion

$[x_0, \dots, x_n] \longmapsto [tx_0, \dots, tx_{i_0-1}, x_{i_0}, tx_{i_0+1}, \dots, x_{i_1}, \dots ]$

bei der die Koordinaten $x_{i_0}, \dots, x_{i_k}$ unverändert bleiben, die anderen mit $t$ gegen $0$ gehen $1 \geq t \geq 0$.

Dies klappt, da wir $j(P_{n-k-1})$ entfernt haben. $j(P_{n-k-1})$ ist die Teilmenge von $P_n$, deren Koordinaten an den Stellen $i_0, i_1, \dots, i_k$ gleich $0$ sind.

<u>Proposition</u>: For $0 \leq k, l$, $k+l \leq n$

$$- \cup - : H^{dk}(P_n;R) \otimes H^{dl}(P_n;R) \longrightarrow H^{d(l+k)}(P_n;R)$$

is an isomorphism.

(i.e. if $x \in H^d(P_n;R)$ is a generator of $H^d(P_n;R) \cong R$, then for $1 \leq k \leq n$ $x^k$ is a generator of $H^{kd}(P_n;R)$ )

<u>Proof</u>. It suffices to consider the case $n = k+l$, since for $n > k+l$ inclusion of $P_{k+l}$ in $P_n$ induces an iso ~~of~~ $H^i(P_n;R) \longrightarrow H^i(P_{k+l};R)$, $0 \leq i \leq d(k+l)$.

We let $P_k \hookrightarrow P_n$ be the standard embedding and denote by $\hat{P}_{n-k}$ the embedding onto the last $n-k+1$ coordinates. Then $P_k \cap \hat{P}_{n-k}$ is the point $[0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0] = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$, the $1$ in the $k$-th coordinate

Now look at (coeff. in $\mathbb{R}$)

$$\begin{tikzcd}
H^{dk}(P_n) \arrow[d] & H^{dk}(P_n, P_n \setminus \hat{P}_{n-k}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^{dk}(\mathbb{R}^{dn}, \mathbb{R}^{dn} \setminus \hat{\mathbb{R}}^{d(n-k)}) \arrow[d] \\
H^{dk}(P_k) & H^{dk}(P_k, P_k \setminus \hat{P}_0) \arrow[l] \arrow[r] & H^{dk}(\mathbb{R}^{dk}, \mathbb{R}^{dk} \setminus 0)
\end{tikzcd}$$

Jetzt geht es wieder mit Deutsch weiter!

Hier ist $\mathbb{R}^{dn} \hookrightarrow P_n$ die Teilmenge

$$\{[x_0, \dots, x_n] \in P_n \ , \ x_k \neq 0\} \cong$$

$$\{(x_0, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{d(n+1)}$$

und somit homöomorph zu $\mathbb{R}^{dn}$

$\mathbb{R}^{dk} \subset \mathbb{R}^{dn}$ ist $\mathbb{R}^{dn} \cap P_k$, ist also die Standardeinbettung

$\hat{\mathbb{R}}^{d(n-k)} \subset \mathbb{R}^{dn}$ ist $\mathbb{R}^{dn} \cap \hat{P}_{n-k}$. $\hat{P}_0 \subset P_k$ ist der

Punkt $[0, \dots, 0, 1] \in P_k$.

Alle Abbildungen sind durch Inklusionen induziert, und wir wissen dass die senkrechten Abb. links und rechts Isom. sind.

Die senkrechte Abb. in der Mitte ist ein Iso., da

$$\begin{tikzcd}
P_k \setminus \hat{P}_0 \arrow[r, hook] & P_n \setminus \hat{P}_{n-k} \\
P_{k-1} \arrow[u, "\text{starker Def.retrakt}"] \arrow[r, equal] & P_{k-1} \arrow[u, "\text{starker Def.-retr.}"']
\end{tikzcd}$$

wobei die Def.retr. links die Einschränkung der Deformationsretraktion rechts ist.

Die Abb. unten links ist ein Iso, wegen Exaktheit in

$$\underset{\overset{=}{0}}{H^{dk}(P_{k-1})} \leftarrow H^{dk}(P_k) \leftarrow H^{dk}(P_k, P_k \setminus \hat{P}_0) \leftarrow H^{dk-1}(P_{k-1}) \xleftarrow{\cong} H^{dk-1}(P_k)$$

und $(\mathbb{R}^{dk}, \mathbb{R}^{dk} \setminus 0) = \left(P_k \setminus P_{k-1}, P_k \setminus (P_{k-1} \cup \hat{P}_0)\right)$

$$\subset (P_k, P_k \setminus \hat{P}_0)$$

ist eine Ausschneidungsinklusion. ($P_{k-1}$ ist abgeschl. und $P_k \setminus \hat{P}_0$ ist offen).
Also sind alle Abb. in dem Rechteck auf Seite 10.5 Isomorphismen.

Nun betrachte das entspr. Diagramm, wobei $P_k$ durch $\hat{P}_{n-k}$ und $\hat{P}_{n-k}$ durch $P_k$ ersetzt wird. Uns interessieren nun jeweils die oben stehenden Zeilen. Tensorieren wir diese und machen das Cup-Produkt, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc}
H^{dk}P_n \otimes H^{d(n-k)}(P_n) & \xleftarrow{\cong} & H^{dk}(P_n, P_n \setminus \hat{P}_{n-k}) \otimes H^{d(n-k)}(P_n, P_n \setminus P_k) & \xrightarrow{\cong} & H^{dk}(\mathbb{R}_0^{dk} \times \mathbb{R}^{d(n-k)}) \otimes H^{d(n-k)}(\mathbb{R}^{dk} \times \mathbb{R}_0^{d(n-k)}) \\
\downarrow \cup & & \downarrow \cup & & \cup \downarrow \cong \\
H^{dn}(P_n) & \longleftarrow & H^{dn}(P_n, P_n \setminus \hat{P}_0) & \longrightarrow & H^{dn}(\mathbb{R}_0^{dn})
\end{array}$$

Rechts steht ein Iso wegen 10.1; also sind alle $-\cup-$ Isomorphismen. $\square$

10.3 Zwei kleine Folgerungen:

(a) Borsuk-Ulam: Für $0 < k < n$ ist $P_k$ kein Retrakt von $P_n$

<u>Beweis:</u> Sonst gibt es $f: P_n \to P_k$ mit $f| P_k = id_{P_k}$

somit $H^i(P_k) \xrightarrow{f^*} H^i(P_n)$ mit $f^i$ ein Iso. für

$0 \leq i \leq dk$. Da $k > 0$ ist $f^d: H^d(P_k) \longrightarrow H^d(P_n)$

ein Iso; ist $x \in H^d(P_k)$ ein Erzeugender, so gilt also

$$f^{nd}(x^n) = (f^d(x))^n$$

Aber $x^n = 0$ in $H^{nd}(P_k)$, da $k < n$

und $(f^d(x))^n \neq 0$, wegen 10.2

(b) Die Anhefteabb. der $n$-$d$-Zelle von $P_n$ an $P_{n-1}$ ist eine Abb. $S^{nd-1} \xrightarrow{h} P_{n-1}$. Sie heißt Hopf-Abbildung.

<u>Satz:</u> $h$ ist nicht nullhomotop.

<u>Bew.</u> Falls doch, so ex. Erw. $H: D^{nd} \longrightarrow P_{n-1}$ von $h$.

$$D^{nd} = \{ (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n : \sum |x_i|^2 \leq 1 \}.$$

Damit können wir eine Retraktion $P_n \longrightarrow P_{n-1}$ definieren

$$[y_0, \dots, y_n] \mapsto \begin{cases} [y_0, \dots, y_{n-1}] & \sum_{i=0}^{n-1} |y_i|^2 \geq |y_n|^2 \\ H\left(\frac{y_0}{y_n}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_n}\right) & \sum |y_i|^2 \leq |y_n|^2 \end{cases}$$

Insbesondere existiert eine nicht nullhomotope Abbildung

$$S^3 \longrightarrow S^2 = \mathbb{C}P^1$$

$$S^7 \longrightarrow S^4 = \mathbb{H}P^1$$

(in der Tat findet man mit Hilfe ähnlicher Schlüsse,

dass $\qquad \pi_{4k-1}(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}$ )

---

Slant-Produkt.

Algebraisch hat man zwei Kettenkomplexe $C$, $D$ und definiert für $R$-Moduln $M$, $N$

$$E : \mathrm{Hom}(D,M) \otimes C \otimes D \otimes N \longrightarrow C \otimes M \otimes N$$

durch $\qquad E(f \otimes c \otimes d \otimes n) = (-1)^{|f| \cdot |c|} \, c \otimes f(d) \otimes n$

(wobei, wie immer $f(d) = 0$ ist, falls $|f| \neq |d|$ )

Man zeigt, dass $E$ eine Kettenabb. ist und geht über zu Homologie, zusammen mit der Abb. $\alpha$

$$H^i(D;M) \otimes H_n(C \otimes D \otimes N) \xrightarrow{\alpha} H_{n-i}\big(\mathrm{Hom}(D,M) \otimes C \otimes D \otimes N\big)$$

$$\xrightarrow{E_*} H_{n-i}(C \otimes M \otimes N)$$

$$\xi^i \otimes z_n \longmapsto \xi^i \backslash z_n \qquad \xi^i \text{ slant } z_n$$

Für topologische Räume nimmt man

$$\mathcal{C} = C(X,A;M)$$
$$\mathcal{D} = C(Y,B;N) \quad , \quad \{A\times Y, X\times B\} \text{ exzisiv in } X\times Y$$

Macht dann

$$C((X,A)\times(Y,B)\otimes N) \xrightarrow{EZ} C(X,A)\otimes C(Y,B)\otimes N$$

und dann die obige Konstruktion und erhält das geometrische Slantprodukt

$$H^i(Y,B;M)\otimes H_n((X,A)\times(Y,B);N) \longrightarrow H_{n-i}(X,A;M\otimes N)$$
$$\xi^i \otimes z_n \longmapsto \xi^i \backslash z_n .$$

Regeln:

(i) Natürlich $\quad f:(X,A)\to(X',A') \ , \ g:(Y,B)\to(Y',B')$

$$f_*\left(g^*(\xi')\backslash z\right) = \xi'\backslash (f\times g)_*(z) .$$

(ii) Assoziativ $\quad (\xi\times\eta)\backslash z = \xi\backslash(\eta\backslash z)$

$\xi\in H^*(X,A)$, $\eta\in H^*(Y,B)$, $x\in H_*((Z,C)\times(X,A)\times(Y,B))$ und allen nötigen Ausschneidungseigenschaften

(iii) Einselement $\quad 1\in H^0(Y,B)$, $z\in H_*((X,A)\times(Y,B))$

Dann ist $1\backslash z = p_*(z)$, $p:(X,A)\times(Y,B)\to(X,A)$