

Eulers Polyederformel, und die Arithmetisierung der Gestalt

Christian Blatter und Günter M. Ziegler

0 In ihrem Beitrag¹ zu dem Band „Mathesis und Graphe“ zeichnen die Autoren die Geschichte der Eulerschen Polyederformel nach und beschreiben, wie diese Formel zum Ausgangspunkt der modernen Polyedertheorie geworden ist. Unser Ziel ist ein historisches, aber nicht minder ein didaktisches. Wir wollen den Leser (die Leserin) mitnehmen auf eine mathematische Reise durch die Jahrhunderte, die zu neuester Forschung hinführt. Dabei werden wir ihn mit mathematischen Inhalten — klassischen wie modernen — und geometrischen Erfahrungen abseits der Schulmathematik bekannt machen, die er auch als mathematischer Laie mit normaler geometrischer Intuition durchaus nachvollziehen kann, wenn er denn will. Eine Prüfung findet nicht statt.

1 Was ist ein Polyeder? Ein „räumlicher Körper“, mit Ecken, Kanten und Seitenflächen, aber ohne irgendwelche Rundungen. Euler beschreibt das in seiner berühmten, 1758 erschienenen Notiz [4], [12] (s.u.) folgendermaßen: „Zum Umfang des von Figuren der Fläche eingeschlossenen Körpers aber gehören 1. die Figuren der Fläche selbst, die dessen Umfang bilden, die Hedren (Flächen) genannt werden; 2. das Zusammentreffen zweier Hedren den Seiten folgend, durch deren Linien die Begrenzungen des Körpers entstehen: Die Grenzen werde ich Kanten nennen, da ich bei den stereometrischen Autoren keinen eigenen Namen dafür finde. 3. Punkte, in denen drei und mehr Hedren zusammentreffen, die Winkelpunkte des Körpers genannt werden.“ Wir werden weiter unten den Polyederbegriff in heutiger Sprache beschreiben.

Beispiele von Polyedern sind allgegenwärtig: ein Quader, eine Pyramide oder ein noch nicht angespitzter Bleistift. Am berühmtesten sind die fünf regulären Polyeder, auch *Platonische Körper* genannt: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder (Abb. 1). Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass alle Seitenflächen kongruente reguläre Vielecke sind und an jeder Ecke gleich viele von ihnen zusammentreffen. Die Anschauung sagt uns, dass man aus sechs Streichhölzern das Gerüst eines Tetraeders bilden kann, aus sechs Quadraten die Oberfläche eines Würfels und aus zwei einander entgegengesetzten vierseitigen Pyramiden passender Höhe ein Oktaeder. Dass es das Dodekaeder und das Ikosaeder tatsächlich „gibt“, ist aber nicht selbstverständlich und wurde angeblich von dem griechischen Mathematiker Theaetet (ca. 417–369 v.Chr.) zum ersten Mal bewiesen. Die Konstruktion von Dodekaeder und Ikosaeder in Buch XIII bildet einen Höhepunkt der „Elemente“ Euklids — und der Mathematik des klassischen Griechenland.

¹ Der vorliegende Text beruht auf einem Vortrag, den GMZ am International Euler Symposium in Basel, 31. Mai/01. Juni 2007, für Mathematiker gehalten hat. Eine Nachschrift dieses Vortrags ist in der Euler-Sondernummer der Elemente der Mathematik [14] erschienen.

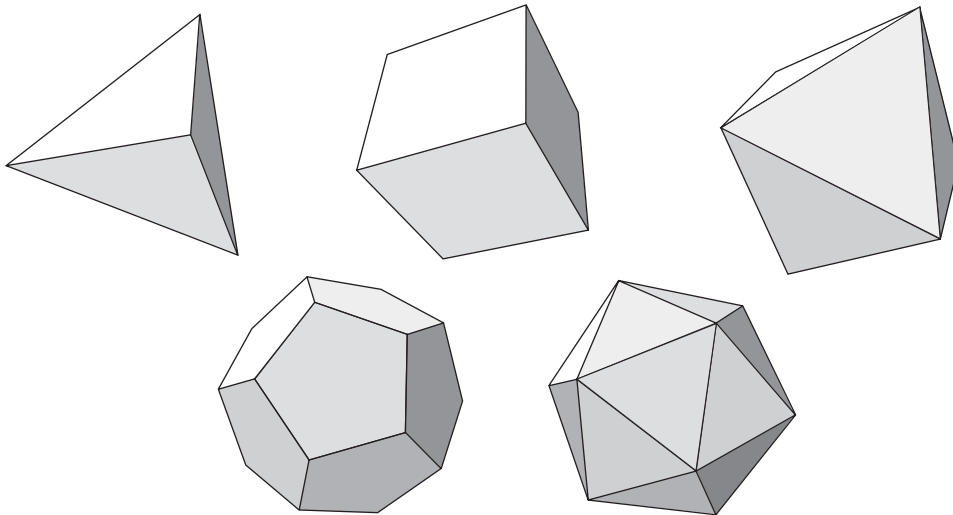


Abb. 1

Außer den fünf Platonischen Körpern gibt es einen ganzen Zoo von Körpern, deren Seitenflächen nicht mehr alle unter sich gleich, aber immer noch reguläre Vielecke sind. Ein Beispiel ist der nach dem amerikanischen Architekten und Designer Buckminster Fuller benannte „Buckyball“ (Abb. 2), ein abgestumpftes Ikosaeder, dessen Oberfläche aus 12 regulären Fünfecken und 20 regulären Sechsecken besteht und das dem 1970 eingeführten FIFA-Fußball zu Gevatter gestanden hat.

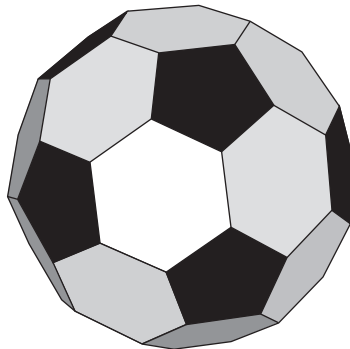


Abb. 2

2 Auf den folgenden Seiten soll es aber nicht um reguläre oder halbbreguläre Polyeder gehen, auch nicht um die Berechnung des Volumens oder der Oberfläche von solchen Körpern, und überhaupt: Auf die genauen Längen, Winkel und Flächeninhalte der einzelnen Elemente kommt es uns gar nicht an. Was zählt, ist nur die *kombinatorische Struktur* der betrachteten Polyeder, also das Netz von Ecken, Kanten und Seitenflächen, das man auch auf einem ebenen Blatt Papier zeichnen kann.

Wir gehen also mit Euler der folgenden zentralen Frage der Polyedertheorie nach: *Welche kombinatorischen Strukturen können bei Polyedern im dreidimensionalen Raum überhaupt vorkommen?* Insbesondere interessieren uns die Anzahlen e , k und f der Ecken, Kanten und Seitenflächen bei irgendwelchen dreidimensionalen Polyedern. Man kann diese Anzahlen für die bekanntesten Polyeder tabellieren (siehe die Tabelle 1) und stellt fest, dass in allen Fällen $e + f = k + 2$ gilt.

	e	k	f
Tetraeder	4	6	4
n -seitige Pyramide	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
Würfel	8	12	6
n -seitiges Prisma	$2n$	$3n$	$n + 2$
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20
Buckyball	60	90	32

Tabelle 1

Das könnte ja Zufall sein oder mit den besonderen Symmetrien dieser Polyeder zusammenhängen. Warum sollte es kein Polyeder mit genau 14 Ecken, 32 Kanten und 22 Seitenflächen geben? Unser Befund ist eben kein Zufall, sondern genau die *Eulersche Polyederformel* — das erste geometrische Theorem, das nicht von Längen, Winkeln oder Flächeninhalten handelt, sondern von den überhaupt möglichen Gestalten. Wir schreiben die Formel nochmals hin:

$$(1) \quad e + f = k + 2 .$$

Was wir hier vor uns haben, ist nicht eine amüsante Gesetzmäßigkeit beim Basteln mit Karton, sondern eine Urtatsache der Geometrie und der Ausgangspunkt eines zentralen Zweiges der modernen Mathematik, der *algebraischen Topologie*, zu Deutsch: der Beschreibung von Gestalt als mathematischer Struktur. Mit der Eulerschen Polyederformel (1) hat eine ganz neue Betrachtungsweise in der Geometrie Einzug gehalten, und dieser Durchbruch ist in seiner mathematikgeschichtlichen Bedeutung einigermaßen vergleichbar mit der Erfindung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz, auch wenn wir hinsichtlich des unmittelbaren Einflusses auf den Fortschritt der Mathematik insgesamt von einem „slow start“ reden müssen. Unter diesen Umständen ist es bestimmt angebracht, die historischen Hintergründe der Eulerschen Formel etwas genauer unter die Lupe zu nehmen.

3 Es gab nämlich Vorläufer. Als Descartes am 11. Februar 1650 in Stockholm starb, verblieb sein mathematischer Nachlass während einigen Jahren in Schweden und wurde dann nach Paris gesandt, wo die betreffenden Kisten in einem sehr schlechten Zustand eintrafen. Trotzdem wurde ein großer Teil des Nachlasses bis 1667 publiziert. Anlässlich eines Besuchs in Paris hatte Leibniz 1676 Gelegenheit, in das unpubliziert gebliebene Material Einblick zu nehmen, und er fand dabei ein Manuskript mit dem Titel „Progymnasmata de Solidorum Elementis“, das sein Interesse erweckte. Er stellte eine Abschrift davon her, verzichtete aber auf eine Publikation. Man kann darüber spekulieren, ob er die Sache nicht ganz verstanden oder deren Bedeutung unterschätzt

hat. Descartes' Originalmanuskript ging verloren, und Leibniz' Abschrift [2] wurde erst 200 Jahre später in einem unkatalogisierten Teil seines Nachlasses in der Königlich Hannoverschen Bibliothek wiederentdeckt. Abb. 3 aus [5] zeigt einen Ausschnitt dieses Dokuments. Mathematisch besagt der maßgebende Abschnitt das Folgende: Betrachte ein Polyeder. Es sei α die Anzahl der „Raumwinkel“ (gemeint ist: Ecken), ϕ die Anzahl der Seitenflächen und ρ die Anzahl der *Flächenwinkel*, das sind die Winkel in den Ecken von Seitenflächen. Descartes argumentiert nun über die Summe Σ aller Flächenwinkel und beweist, dass die Größen ρ , ϕ und α durch die Gleichung

$$(2) \quad \rho = 2\phi + 2\alpha - 4$$

miteinander verknüpft sind. Hier können wir die Anzahl ρ der Flächenwinkel auf einfache Weise durch die Anzahl k der Kanten ausdrücken: Jede Kante nimmt an vier Flächenwinkeln teil; somit gibt es insgesamt $4k$ Inzidenzen je einer Kante mit einem Flächenwinkel. Da jeder Flächenwinkel zwei derartige Inzidenzen beansprucht, ist die Anzahl ρ der Flächenwinkel die Hälfte von $4k$; das heißt, wir haben $\rho = 2k$. Damit geht (2) über in $2k = 2\phi + 2\alpha - 4$, und das ist nichts anderes als (1), mit anderen Buchstaben geschrieben. Man kann also (2) als einen Vorläufer von (1) ansehen.

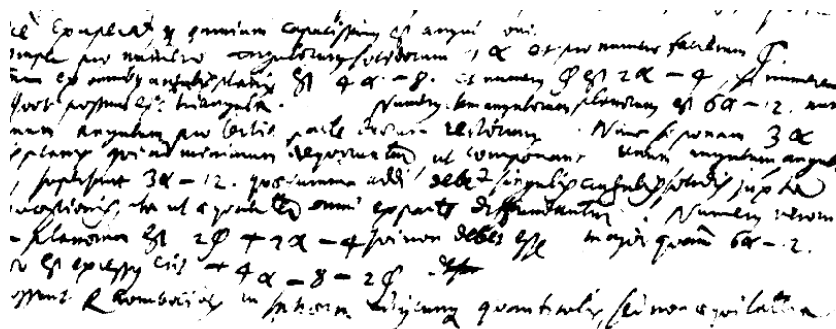


Abb. 3

Damit kommen wir zu Euler. Seine Polyederformel erscheint zum ersten Mal in einem berühmten Brief an Goldbach [7], datiert am 14. November 1750. Wohl noch im selben Jahr reichte Euler bei der Petersburger Akademie eine diesbezügliche Notiz ein. Sie wurde in die *Novi commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae* 1752/53 [4] aufgenommen, die aber erst 1758 gedruckt herauskamen. Eine deutsche Übersetzung dieser Notiz findet sich an anderer Stelle in diesem Band [12]. Euler bezeichnet die Anzahl der „anguli solidi“ (Ecken) eines Polyeders mit S , die der „acies“ (Kanten) mit A und diejenige der „hedra“ (Seitenflächen) mit H und kommt so auf die Formel

$$S + H = A + 2,$$

die er in seinem Brief an Goldbach „noch nicht recht rigorose demonstrieren“ konnte. In dieser Notiz ist übrigens zum ersten Mal von den *Kanten* eines Polyeders die Rede, siehe das Zitat am Anfang unseres Artikels.

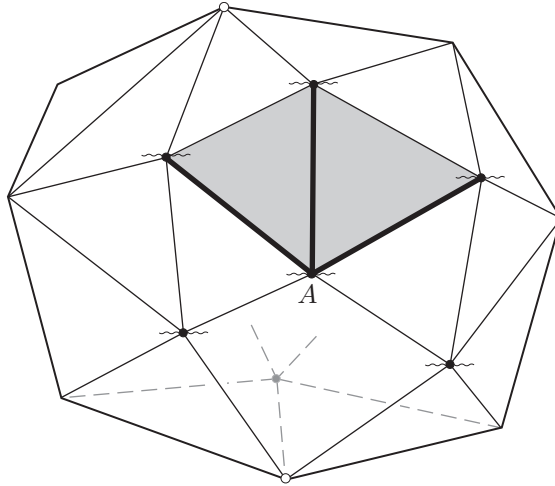


Abb. 4

4 Weil die Sache so wichtig ist, dürfen wir dem Leser vielleicht einen Beweis von (1) zumuten. In David Eppsteins „Geometry Junkyard“ [3] findet man nicht weniger als neunzehn verschiedene Beweise der Eulerschen Formel. Was folgt, ist ein Zusammenschritt der Beweise Nummer 6 (von Thurston) und 14 („Arche Noah“).

Wir stellen das Polyeder in eine Badewanne (man wird gleich sehen, warum), wobei wir darauf achten, dass keine zwei Ecken auf gleicher Höhe sind. Dann verläuft auch keine Kante waagrecht. Wir lassen nun das Wasser einlaufen. Jedes Mal, wenn der steigende Wasserspiegel eine Ecke passiert, werden neue Kanten und Seitenflächen nass, und zwar eine Kante mehr als Seitenflächen (siehe die Ecke A in Abb. 4). Diese Regel gilt nicht bei der untersten Ecke, hier sind es gleich viele Kanten wie Seitenflächen, die gleichzeitig nass werden, und auch nicht bei der obersten Ecke, wo nichts Neues mehr nass wird. Am Anfang war alles trocken, und am Schluss sind alle Kanten und alle Seitenflächen nass. Wir können daher die folgende Rechnung aufmachen: Die Gesamtzahl der Kanten ist gleich der Gesamtzahl der Seitenflächen, plus eine zusätzliche Kante pro Ecke, ausgenommen die beiden speziellen Ecken. Schreiben wir das in Gleichungsform auf, so ergibt sich

$$k = f + (e - 2),$$

und das ist die Formel (1).

5 An dieser Stelle verlassen wir den dreidimensionalen Erfahrungsraum und steigen zu höheren Dimensionen auf. Weitherum der erste Mathematiker, der sich in die höherdimensionale Geometrie vorgewagt hat, war der Schweizer Ludwig Schläfli (1814–1895). Man hat ihn zu seinen Lebzeiten nicht recht verstanden, und seine „Theorie der vielfachen Kontinuität“ aus den Jahren 1850–1852 erschien erst 1901 in gedruckter Form [10]. In diesem Werk findet sich die folgende Formel (3), heutzutage *Euler-Poincaré-Formel* genannt:

Theorem. Für jedes d -dimensionale konvexe Polyeder P gilt

$$(3) \quad f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = \begin{cases} 0 & (d \text{ gerade}), \\ 2 & (d \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Hier bezeichnet allgemein f_r die Anzahl der r -dimensionalen Seiten von P ; insbesondere entsprechen f_0, f_1, f_2 den bisherigen e, k und f . Die Eulersche Formel (1) lautet in den neuen Bezeichnungen

$$(4) \quad f_0 - f_1 + f_2 = 2.$$

Dies ist der Fall $d = 3$ des Theorems, und für $d = 2$ (ebene Vielecke) stimmt (3) mit der nachfolgenden Formel (5) überein. Die Formel (3) ist also eine Verallgemeinerung von Befunden der anschaulichen Geometrie auf Polyeder beliebiger Dimension d . Poincaré hat (3) mit Hilfe der von ihm erfundenen Homologietheorie bewiesen [8]; der elementare Beweisansatz von Schläfli wurde erst 1969 von Bruggesser und Mani in einen richtiggehenden Beweis verwandelt [1].

6 Wenn wir auf den folgenden Seiten zu moderneren Aspekten der Polyedertheorie kommen wollen, so geht das nicht ohne nochmalige Betrachtung der Frage: Was ist ein Polyeder? Für eine allgemeine Theorie über Polyeder genügt es nämlich nicht, die aus der anschaulichen Geometrie bekannten Beispiele zu betrachten. Wir benötigen, wie immer in der Mathematik, wenn es um „allgemeine Sachverhalte“ geht, ein allgemeines Konstruktionsprinzip für Polyeder, oder wenigstens einen Test, der entscheidet, welche geometrischen Objekte als Polyeder akzeptiert werden und welche nicht.

Es lohnt sich, damit in Dimension 2 zu beginnen. Ein zweidimensionales Polyeder ist ein Vieleck endlicher Ausdehnung, mit Ecken, Kanten und einem Innern. Die Mathematiker haben sich darauf geeinigt, sowohl Löcher wie einspringende Ecken auszuschließen. Ein Polyeder P ist also vereinbarungsgemäß *konvex*, das heißt: Die Verbindungsstrecke von irgend zwei Punkten von P verläuft ganz innerhalb von P . Das allgemeinste zweidimensionale Polyeder wird folgendermaßen erhalten: Man schlägt in der Ebene an n „zufällig gewählten“ Orten einen Nagel ein (Abb. 5, links) und legt ein geschlossenes Gummiband um diese Versammlung. Das Gummiband wird sich auf möglichst kurze Länge zusammenziehen und am Schluss ein gewisses Polyeder P , die sogenannte *konvexe Hülle* der gegebenen n Punkte, begrenzen. Allfällige Nägel im Innern von P werden für die weiteren Betrachtungen nicht benötigt und können wieder entfernt werden. Was wir schon feststellen können, ist dieses: Der Rand unseres zweidimensionalen Polyeders P ist jenes Gummiband, also „im Wesentlichen“ eine Kreislinie oder 1-dimensionale Sphäre, und das Innere von P ist „im Wesentlichen“ eine Kreisscheibe.

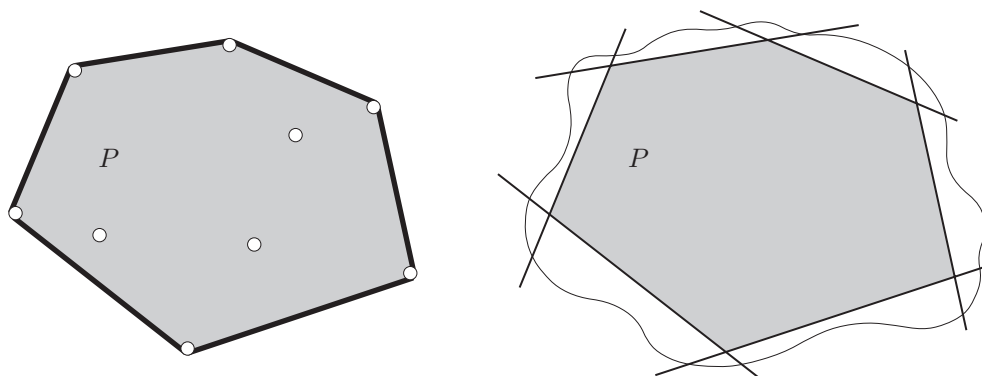


Abb. 5

Was nun die kombinatorische Struktur von P betrifft, so gibt es eine gewisse Anzahl f_0 von Ecken, mindestens 3, und gleichviele Kanten, die sich in zyklischer Reihenfolge gegenseitig ablösen. Damit ist eigentlich schon alles gesagt. Wenn wir uns nur auf die Anzahlen f_0 und f_1 konzentrieren, so haben wir demnach in Dimension 2 die folgende abschließende Liste von Bedingungen:

$$(5) \quad f_0 - f_1 = 0, \quad f_0 \geq 3, \quad f_1 \geq 3.$$

Bevor wir zu höheren Dimensionen zurückkehren, gilt es, darauf aufmerksam zu machen, dass sich ein allgemeines zweidimensionales Polyeder noch auf eine ganz andere Weise herstellen lässt: Man stelle sich einen Kuchenteig vor, der übers Zeichenblatt ausgewallt ist. Von diesem Teig werden nun durch endlich viele geradlinige Schnitte außenliegende Teile entfernt, bis nur noch ein rundherum geradlinig begrenztes Vieleck P übrigbleibt (Abb. 5, rechts). Dieses Vieleck lässt sich als Durchschnitt von Halbebenen auffassen. Jeder geradlinige Schnitt teilt ja die Ebene in zwei Hälften: die „gute“ Hälfte, die beibehalten, und die „schlechte“ Hälfte, die weggetan wird. Das Vieleck P besteht aus genau denjenigen Teiganteilen, die sich bei jedem Schnitt auf der „guten“ Seite befanden.

Es ist anschaulich klar, dass die beiden hier beschriebenen Konstruktionsprinzipien (konvexe Hülle von n gegebenen Punkten bzw. Durchschnitt von n gegebenen Halbebenen) dieselbe Klasse von Objekten P definieren. Wenn es aber um höherdimensionale Polyeder geht, so ist das viel weniger klar und braucht einen richtiggehenden Beweis. Ein grundlegender Satz der Polyedertheorie lautet nämlich wie folgt:

Theorem. *Es sei P die konvexe Hülle von n gegebenen Punkten im d -dimensionalen Raum \mathbb{R}^d . Dann lässt sich P auch als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen auffassen. Und umgekehrt: Ist P gegeben als Durchschnitt von n Halbräumen des \mathbb{R}^d , so gibt es eine endliche Zahl N von Extrempunkten von P , und P lässt sich als konvexe Hülle dieser N Punkte auffassen.*

Im Normalfall muss man damit rechnen, dass das N wesentlich grösser ist als das n . Der d -dimensionale Würfel zum Beispiel besitzt $2d$ Seitenflächen, aber 2^d Ecken. Nur für $d = 2$, also beim Quadrat, ist $2d = 2^d$. Das ist nicht so akademisch, wie es aussieht, sondern von unerhörter praktischer Bedeutung bei der Optimierung von Produktionsplänen. Die „ökonomischen Rahmenbedingungen“ eines derartigen Plans erscheinen als sogenannte lineare Ungleichungen. Diese Ungleichungen definieren ein gewisses hochdimensionales Polyeder P als Durchschnitt von Halbräumen. Jeder Punkt von P ist ein „zulässiger Plan“. Der optimale Plan entspricht einer ganz bestimmten Ecke von P . Wie findet man diese Ecke? Zur Lösung dieser Art von Aufgaben ist schon ungeheuer viel Scharfsinn aufgebracht (und ungeheuer viel Computerzeit verwendet) worden.

Wie wird so eine Polyederstruktur in einem Computer repräsentiert, der sich ja nicht wie wir zeichnerische Vorstellungen machen kann? Der folgende Hinweis mag hierzu genügen: Ein Polyeder P im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 hat Seiten der Dimensionen 0, 1 und 2. Um nun die kombinatorische Struktur von P zu beschreiben, nummerieren wir die Ecken in beliebiger Weise von 1 bis f_0 , die Kanten von 1 bis f_1 und die Seitenflächen von 1 bis f_2 . Die kombinatorische Struktur von P besteht dann aus zwei Listen. Ein typischer Eintrag der ersten Liste lautet so: „Die Ecke Nr. 17 ist Endpunkt der Kanten

mit Nummern 5, 9 und 2“, und ein typischer Eintrag der zweiten Liste lautet so: „Die Kante Nr. 8 gehört zum Rand der Seitenflächen mit Nummern 5 und 12.“

7 Wie in den vorangehenden Abschnitten werden wir hier die präzisen Inzidenzen zwischen den Seiten verschiedener Dimension nicht weiter hinterfragen, sondern uns nur um die *Anzahlen* f_0, f_1, \dots, f_{d-1} dieser Seiten kümmern. Diese Anzahlen lassen sich zu dem Datensatz

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{d-1}),$$

genannt *f-Vektor* des betreffenden Polyeders, zusammenfassen. Die Formeln (4), (5) und ihre *d*-dimensionale Verallgemeinerung (3) sind *notwendige* Bedingungen, die der *f*-Vektor eines real existierenden Polyeders erfüllen muss. Die ursprüngliche „zentrale Frage der Polyedertheorie“ vereinfacht sich damit zu der folgenden: Müssen die f_r außer (4), (5), bzw. (3), noch weitere Bedingungen erfüllen? Man kann es auch so formulieren:

Problem. *Man beschreibe (charakterisiere, approximiere, ...) für gegebenes $d \geq 2$ die „Datenbank“ \mathcal{F}_d aller *f*-Vektoren von konvexen *d*-Polyedern; gemeint ist die Menge*

$$\mathcal{F}_d = \{ \mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1}) \mid \mathbf{f} \text{ ist der } f\text{-Vektor eines konvexen } d\text{-Polyeders} \} .$$

Die Menge \mathcal{F}_d weist von vorneherein eine gewisse Spiegelsymmetrie auf: Ist der Datensatz $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{d-1})$ ein Element von \mathcal{F}_d , so ist auch der „reverse“ Datensatz

$$(f_{d-1}, \dots, f_2, f_1, f_0)$$

ein Element von \mathcal{F}_d . Diese Symmetrie rührt her von einem tiefen und allumfassenden geometrischen Geheimnis, der sogenannten *Poincaré-Dualität*. In der Welt der Polyeder wirkt sich diese Dualität folgendermaßen aus, und wird dann *Polarität* genannt: Zu jeder Polyederstruktur P gibt es eine *duale* Struktur \hat{P} , deren *f*-Vektor aus dem von P durch Reversion entsteht. In diesem Sinn sind Würfel und Oktaeder zueinander dual, ebenso Dodekaeder und Ikosaeder (vgl. die Tabelle 1).

8 Wir beginnen nun mit der Beschreibung der Mengen \mathcal{F}_d für $d = 2, 3, \dots$, so viel man im Augenblick darüber weiß.

Der Fall $d = 2$ ist mit (5) abgehakt.

Im Fall $d = 3$ gibt es in der Tat ausser der Eulerschen Formel (4) noch weitere, leicht einzusehende, Bedingungen. Jede Seitenfläche hat mindestens drei Kanten, folglich gibt es mindestens $3f_2$ Inzidenzen einer Kante mit einer Seitenfläche. Da jede Kante genau zwei solche Inzidenzen produziert, ergibt sich die Bedingung $2f_1 \geq 3f_2$. Für Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder gilt hier das Gleichheitszeichen, da alle ihre Seitenflächen Dreiecke sind. Mit (4) folgt

$$2f_0 + 2f_2 = 2f_1 + 4 \geq 3f_2 + 4$$

und somit $f_2 \leq 2f_0 - 4$. Die hierzu duale Überlegung, davon ausgehend, dass in jeder Ecke mindestens drei Kanten enden, liefert die weitere Bedingung $f_0 \leq 2f_2 - 4$. Damit haben wir alles beieinander. Ernst Steinitz (1871–1928) hat nämlich 1906 den folgenden Satz bewiesen [11]:

Theorem. Ein Datensatz (f_0, f_1, f_2) ist genau dann der f -Vektor eines dreidimensionalen Polyeders, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(6) \quad f_0 - f_1 + f_2 = 2, \quad f_2 \leq 2f_0 - 4, \quad f_0 \leq 2f_2 - 4.$$

Unsere Abb. 6 zeigt eine Projektion von \mathcal{F}_3 in die (f_0, f_2) -Ebene. Wegen (4) haben wir für den f -Vektor nur 2 Freiheitsgrade; in der Abb. 6 ist also keine Information verlorengegangen.

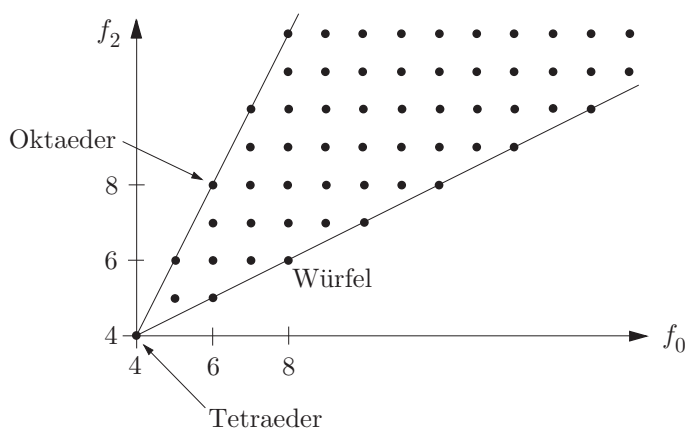


Abb. 6

Was galt es hier überhaupt noch zu beweisen? Die drei Bedingungen (6) hatten wir ja schon. Es gibt aber einen entscheidenden zusätzlichen Punkt. Steinitz hat nämlich gezeigt, dass die Bedingungen (6) auch *hinreichend* sind, und das heißt: Für jeden Datensatz (f_0, f_1, f_2) , der die Bedingungen (6) erfüllt, gibt es tatsächlich ein dreidimensionales Polyeder, dessen f -Vektor mit diesem Datensatz übereinstimmt. Der Beweis verlangt eine explizite Lösung der Konstruktionsaufgabe „Gegeben ein zulässiger Datensatz (f_0, f_1, f_2) , man konstruiere ein reales Polyeder P mit diesen Seitenzahlen“. Die folgende kleine Übungsaufgabe vermittelt davon einen Eindruck: Man zeige, dass es zu jedem vorgegebenen $f_1 \geq 6$ ein Polyeder mit genau f_1 Kanten gibt, außer für $f_1 = 7$. (Die Lösung findet sich am Schluss dieses Artikels.)

9 Wir kommen zu Ergebnissen der Polyedertheorie aus den letzten Jahrzehnten. Hierzu benötigen wir einige weitere Grundbegriffe. Wir haben in Abschnitt 6 beschrieben, dass ein Polyeder P als konvexe Hülle von n gegebenen Punkten aufgefasst werden kann. Sind diese Punkte mehr oder weniger zufällig im dreidimensionalen Raum verteilt, so liegen nie mehr als drei davon in einer Ebene. Folglich besitzt ein derartiges Polyeder P nur Dreiecke als Seitenflächen. Allgemein: Sind die n Punkte „zufällig“ im d -dimensionalen Raum verteilt, so liegen nie mehr als d davon in einer $(d-1)$ -dimensionalen Hyperebene. Sämtliche $(d-1)$ -dimensionalen Seitenflächen von P sind dann „höherdimensionale Versionen von Dreiecken“, genannt *Simplizes* (das ist der Plural von *Simplex*). In der Abb. 7 sind die Simplizes der Dimensionen 0 bis 4 dargestellt. Ein derartiges Polyeder

P wird *simplicial* genannt; seine kombinatorische Struktur ist offensichtlich einfacher als die des allgemeinsten Polyeders. Bei einem simplicialen Polyeder sind nicht nur die höchstdimensionalen Seiten Simplizes, sondern überhaupt alle Seiten irgendwelcher Dimension. Von den regulären 3-Polyedern sind das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder simplicial.

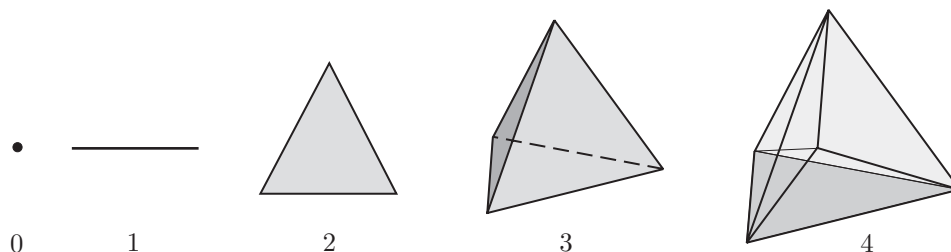


Abb. 7

Analoge Überlegungen betreffend „zufällige“ Lage von Hyperebenen führen zum Begriff des *einfachen* Polyeders. Hier treffen sich in jeder Ecke genau d , und nicht mehr, $(d-1)$ -dimensionale Seitenflächen. Von den regulären 3-Polyedern sind das Tetraeder, der Würfel und das Dodekaeder einfach. Es wird niemanden überraschen, wenn wir nun ankündigen, dass Dualität aus simplicialen Polyedern einfache macht, und umgekehrt.

1971 formulierte McMullen die sogenannte g -Vermutung bezüglich der f -Vektoren von simplicialen (und damit auch von einfachen) Polyedern. Diese Vermutung wurde durch die Anstrengung zahlreicher Mathematiker in den darauffolgenden Jahren vollständig bewiesen. Der Beweis umfasst, wie bei dem oben angeführten Theorem von Steinitz, zwei Teile. Erstens geht es um die notwendigen Bedingungen, vergleichbar (6), die der f -Vektor eines simplicialen d -Polyeders von vorneherein erfüllen muss. Diese notwendigen Bedingungen definieren eine gewisse Menge von „theoretisch zulässigen“ f -Vektoren. Im zweiten Teil des Beweises steht man dann vor der Aufgabe, zu jedem „theoretisch zulässigen“ f -Vektor ein tatsächliches d -dimensionales Polyeder zu konstruieren.

Damit der Leser eine Ahnung erhält, wie das etwa tönt, formulieren wir hier das g -Theorem für den Fall $d = 4$:

Theorem. *Der Datensatz $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ ist genau dann der f -Vektor eines simplicialen 4-Polyeders, wenn er in der Form*

$$(7) \quad \mathbf{f} = (5, 10, 10, 5) + g_1 (1, 4, 6, 3) + g_2 (0, 1, 2, 1)$$

geschrieben werden kann, wobei die ganzzahligen Faktoren g_1 und g_2 den Bedingungen

$$g_1 \geq 0, \quad 0 \leq g_2 \leq \frac{g_1(g_1 + 1)}{2}$$

unterliegen.

Zwei Beispiele: Der f -Vektor des vierdimensionalen Simplex ist $(5, 10, 10, 5)$; das ist (7) mit $g_1 = g_2 = 0$. Das „vierdimensionale Oktaeder“, genannt *Kreuzkörper*, ist ebenfalls simplizial und hat den f -Vektor

$$(8, 24, 32, 16) = (5, 10, 10, 5) + 3(1, 4, 6, 3) + 2(0, 1, 2, 1) .$$

10 Im Weiteren bleiben wir beim Fall $d = 4$, der niedrigsten unanschaulichen Dimension. Es ist eine besondere Wissenschaft, vierdimensionale Polyeder auf zweidimensionalem Papier mehr oder weniger anschaulich darzustellen. Die letzte Teilfigur der Abb. 7 zeigt das sogenannte *Schlegel-Diagramm* eines 4-Simplex, die Abb. 8 dasjenige eines vierdimensionalen Würfels.

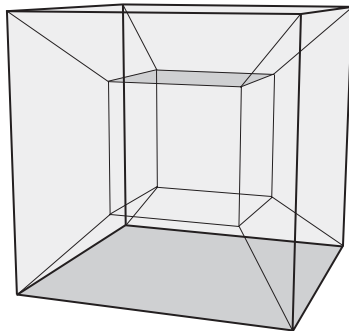


Abb. 8

Die simplizialen und die einfachen 4-Polyeder, von denen das g -Theorem handelt, sind eine Art „kombinatorische Grenzfälle“ von Polyedern, und ihre f -Vektoren liegen sozusagen auf dem „Rand“ von \mathcal{F}_4 . Um auf gute Vermutungen über allfällige weitere „Randbedingungen“ zu kommen, benötigt man einen umfangreichen Zoo von Beispielen. Diese zum Teil mit viel Scharfsinn erdachten Polyeder-Familien haben Namen wie Kreuzkörper, zyklische Polytope, Dreieck \times Dreieck, Schichtpolyeder, undsoweiter. In der Abb. 9 sind zahlreiche dieser Beispiele eingetragen. Diese Abbildung ist der für Mathematiker bestimmten Version [14] dieses Berichts entnommen und kann als vierdimensionales Analogon zu Abb. 6 betrachtet werden.

Bei der Konstruktion derartiger Beispiele haben die Mathematiker die Erfahrung gemacht, dass f_0 und f_3 leicht zu kontrollieren sind, die dazwischen liegenden Koordinaten f_1 und f_2 des f -Vektors aber weniger. Insbesondere ist es gar nicht leicht, Polyeder herzustellen mit besonders vielen Kanten und zweidimensionalen Seiten im Verhältnis zur Anzahl der Ecken und dreidimensionalen Seiten. Derartige Polyeder müssen eine unglaubliche Anzahl von „eigens konstruierten“ Inzidenzen aufweisen. Man wird dazu geführt, die sogenannte *fatness*

$$\Phi = \frac{f_1 + f_2 - 20}{f_0 + f_3 - 10} ,$$

eine Art kombinatorischer body mass index für Polyeder, zu betrachten. Dieses Φ ist dann groß, wenn über Erwarten viele Kanten und zweidimensionale Seiten vorhanden

sind. Gil Kalai hat 1987 bewiesen [6], dass alle vierdimensionalen Polyeder einen Φ -Wert $\geq 3/2$ besitzen. Das Rennen nach oben ist noch in Gang. Die fettesten bis heute gefundenen Polyeder haben einen Φ -Wert knapp unter 9; die betreffenden Publikationen [13] und [9] stammen aus den Jahren 2004 und 2007. Der Ausgang ist aber vollständig offen: Vielleicht gibt es eine obere Schranke für den Φ -Wert; vielleicht findet aber jemand eine Familie von 4-Polyedern, deren Φ -Werte über alle Grenzen wachsen.

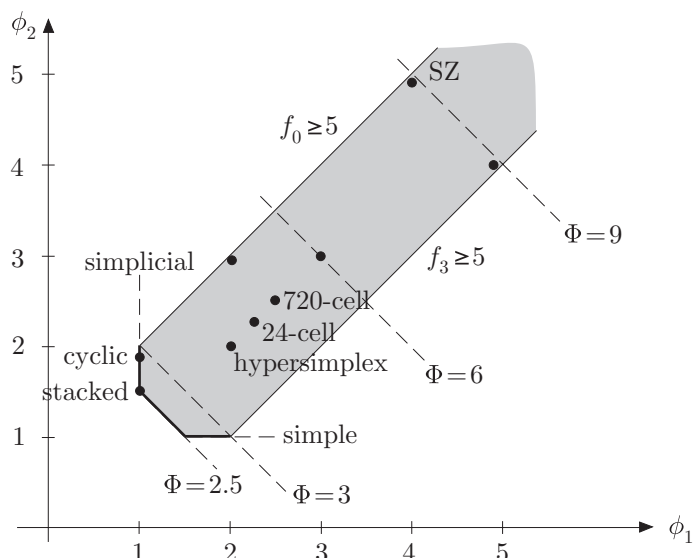


Abb. 9

Wir sind hier mitten drin in „on-going work“, und der Leser wird verstehen, wenn wir an dieser Stelle unseren Bericht beenden. Die auf den letzten Seiten mitgeteilten Fakten sind ja schon ziemlich speziell und, sagen wir einmal: nicht alltagsrelevant. Das Einzige, was noch fehlt, ist die Lösung unserer kleinen Übungsaufgabe aus Abschnitt 8.

Nun, eine n -seitige Pyramide P_n hat $2n$ Kanten; folglich sind schon einmal alle geraden Zahlen ≥ 6 mögliche Kantenzahlen. Errichtet man auf einer Seitenfläche von P_n eine dreikantige Zusatzpyramide, so erhält man ein Polyeder P'_n mit $2n + 3$ Kanten, womit nun auch alle ungeraden Zahlen ≥ 9 als mögliche Kantenzahlen erwiesen sind. Damit ist aber noch nicht gezeigt, dass $f_1 = 7$ wirklich unmöglich ist. Bei einem siebenkantigen Polyeder wäre $f_0 + f_2 = 9$ und folglich $f_0 = 4, f_2 = 5$ oder $f_0 = 5, f_2 = 4$. Beides widerspricht den in (6) angeführten Bedingungen $f_2 \leq 2f_0 - 4$ bzw. $f_0 \leq 2f_2 - 4$. Die Annahme $f_1 = 7$ ist damit ad absurdum geführt. Das war's.

Literatur

- [1] Heinz Bruggesser; Peter Mani: Shellable decompositions of cells and spheres. *Math. Scand.* 29 (1971), 197–205.
- [2] René Descartes: *Exercices pour les éléments des solides*. Ed. and transl. by Pierre Costabel, Presses Universitaires de France, 1987.

- [3] David Eppstein: Nineteen proofs of Euler’s formula $V-E+F=2$. *The geometry junkyard*, <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>
- [4] Leonhard Euler: *Elementa doctrinae solidorum. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 4 (1758), 109–140. Ins Deutsche übertragen durch Wladimir Velminski, siehe [12].
- [5] Pasquale J. Federico: *Descartes on polyhedra. A study of the ‘De Solidorum Elementis’*. Springer, 1982.
- [6] Gil Kalai: Rigidity and the lower bound theorem, I. *Inventiones Math.* 88 (1987), 125–151.
- [7] Helmut Koch: Der Briefwechsel von Leonhard Euler und Christian Goldbach. *Elem. Math.* 62 (2007), 155–166.
- [8] Henri Poincaré: Sur la généralisation d’un théorème d’Euler relatif aux polyèdres. *Comptes Rend. Acad. Sci. Paris* 117 (1893), 144–145.
- [9] Raman Sanyal; Günter M. Ziegler: Construction and analysis of projected deformed products, preprint, October 2007.
- [10] Ludwig Schläfli: *Theorie der vielfachen Kontinuität*. Zürcher und Furrer, Zürich, 1901. (Nachgedruckt in: *Ludwig Schläfli, 1814–1895, Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Vol. I, 167–387. Birkhäuser, 1950.)
- [11] Ernst Steinitz: Über die Eulerschen Polyederrelationen. *Archiv für Mathematik und Physik* 11 (1906), 86–88.
- [12] Wladimir Velminski: Eulers „Elemente einer Lehre von den Körpern“. In: *Mathesis und Graphe*, 000–000. Akademie-Verlag, 2008.
- [13] Günter M. Ziegler: Projected products of polygons. *Electronic Research Announcements AMS* 10 (2004), 122–134, <http://arXiv.org/abs/math/0407042>.
- [14] Günter M. Ziegler; Christian Blatter: Euler’s polyhedron formula — a starting point of today’s polytope theory. *Elem. Math.* 62 (2007), 184–192.

Adressen der Autoren

Christian Blatter
 Albertus-Walder-Weg 16
 CH-8606 Greifensee, Schweiz
 e-mail: christian.blatter@math.ethz.ch

Günter M. Ziegler
 Institut für Mathematik, MA 6-2
 TU Berlin
 D-10623 Berlin, Deutschland
 e-mail: ziegler@math.tu-berlin.de