Jahrhundert der Mathematik

Günter M. Ziegler, TU Berlin

„Woher kommt es, daß die Mathematik in unserer Zivilisation so etwas wie ein blinder Fleck geblieben ist, ein exterritoriales Gebiet, in dem sich nur wenige Eingeweihte verschanzt haben?“ (Hans Magnus Enzensberger)

1

Es gilt als **nicht einfach**, in der Öffentlichkeit und für die Öffentlichkeit über Mathematik zu reden. Denn einerseits sind viele schon aus der Schule geschädigt durch ein sehr enges und sehr langweiliges Bild darüber, was die Mathematik ist und soll, das Bild einer toten und sehr knöchernen Mathematik, die nichts Interessanteres zu tun hat als immer längere Zahlen zu multiplizieren oder zu dividieren, oder die Kongruenz von Dreiecken mit Hilfe von Winkel- und Seitensätzen zu beweisen. Ich möchte und kann Sie beruhigen: Diese Art von „Mathematik“ interessiert mich auch nicht.

Andererseits ist aus der Perspektive des (Unversitäts-)Mathematikers die Mathematik etwas Vielfältiges aber Kompliziertes, etwas oft sehr Technisches, und dementsprechend ist sie der (nicht besonders interessierten) Öffentlichkeit nicht leicht zu vermitteln.

2

Dabei ist die Mathematik aber **wichtig**, und sie wird immer wichtiger, und dies ist weder aufzuhalten noch wegzuleugnen. Ein Schlagwort dafür ist die „zunehmende Mathematisierung der Ingenieurwissenschaften“: Unser tägliches Leben wird gesteuert und bestimmt von mathematischen Techniken, mathematischen Technologien, mathematischen Verfahren. Nur als Stichworte seien hier die mathematischen Verschlüsselungs- und Entschlüsselungsverfahren genannt, die die moderne Telekommunikation, den CD-Player und die Kreditkarte erst möglich machen; mathematische Transformations- und Rekonstruktionsverfahren in allen Arten von Bildgebung und Bildverarbeitung, bis hin zur Computertomographie und Neuerem; der mathematische Entwurf von Kurven, Flächen und Werkstücken im Computer-Aided Design (CAD) und dem Computer-Aided Manufacturing (CAM). Ein im Computer entworfener Kotflügel, ein Chipdesign oder ein optimierter Fahrplan sind zunächst einmal *mathematische Objekte* – die dann in irgendeinem Sinne „realisiert“ werden, oder aber auch nicht.

Die Diagnose lautet also: **Mathematische Technologie ist Schlüsseltechnologie**.

Vieweg „Berufs- und Karriere-Planer Mathematik“
Text für Kapitel 1: Warum Mathematik studieren?

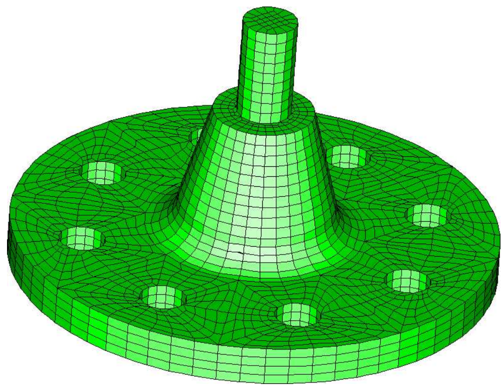

Abbildung 1: © Matthias Müller-Hannemann (TU Berlin)

Die Computer greifen um sich, beanspruchen Zeit und Raum, sind in kürzester Zeit ein fester und nicht-mehr-wegzudenkender Bestandteil von Arbeit, Alltag und Freizeit geworden — das war und ist nicht aufzuhalten, und erst recht nicht zu übersehen. Übersehen wurde aber, dass im *gleichen Maße* genuin mathematische Konzepte, Ideen und Fähigkeiten an Bedeutung gewonnen haben: die Sammlung und Speicherung von Informationen, Ent- und Verschlüsselung, Kompression, sichere und schnelle Übertragung von Daten, Texten und Bildern usw. — all dies sind keine im alltäglichen Sinne „konkreten" Tätigkeiten, sondern dies sind mathematische Konzepte, Strategien und Verfahren *an der Arbeit*, mathematische Theorien und Konstruktionen umgesetzt *in die Praxis*, längst gewohnt und bewährt. Das heißt aber auch: die Omnipräsenz von Internet und neuen Kommunikationsmedien hat schon jetzt dazu geführt, dass von jedem von uns mathematische Fähigkeiten gefordert, verlangt *und geleistet* werden.

Man riskiert also nicht viel, wenn man angesichts dieser Entwicklung ein kommendes **Jahrhundert der Mathematik** prophezeit: das hat schon begonnen! Dies bedeutet, dass die Mathematik ungemein wichtig ist für unser tägliches Leben in einer technisierten und mathematisch-technisierten Welt; aber damit ist nicht gesagt *was Mathematik eigentlich ist* – oder dass irgendwer in der Öffentlichkeit wüßte, was da „dahintersteckt".

3

Es klafft also eine **riesige Lücke** zwischen der vielfältigen Anwendbarkeit mathematischer Methoden und ihrer Wichtigkeit in der modernen Welt einerseits, und andererseits dem sehr engen und eindimensionalen Bild der Mathematik, das die Schule (Ausnahmen bestätigen die Regel) vermittelt bzw. vermitteln kann. Das liegt meiner Erfahrung nach garnicht an den Lehrern, oder den Büchern – einige Geometrie-Schulbücher, die ich kürzlich angesehen habe, haben mir durchaus gefallen – sondern in dem Stoffrahmen und -ausschnitt, den Lehrpläne tradierend und zementieren. Damit ist die Mathematik entkoppelt von der Mathematik, die sich „draußen in der Welt" abspielt. Hans Magnus Enzensberger hat das Ergebnis kürzlich prägnant auf den Punkt gebracht mit dem Titel

> „Zugbrücke außer Betrieb – die Mathematik im Jenseits der Kultur".

Und das, was an Mathematik in der Schule zu sehen und zu erfahren ist, erscheint nur zu wenigen als reizvoll. Die traurige Konsequenz: Keiner gibt gerne zu, Analphabet zu sein, aber die Anumeriker sind stolz auf ihre Behinderung: „In Mathe war ich immer schlecht!“.

4

Ich spreche hier aus der Perspektive des Universitätsmathematikers, dessen Arbeit zunächst nicht auf die Öffentlichkeit ausgerichtet ist, der versucht, seine Wissenschaft voranzubringen, und der versucht, den mathematischen „Stand der Technik“ an seine Studenten weiterzugeben, und mit diesen an den mathematischen Grenzen der Technologie weiterzuarbeiten. Nun könnte ich an dieser Stelle zufrieden sein, und mich zurückziehen auf einen Standpunkt, den der amerikanische Algebraiker Maurice Auslander so schön formuliert hat:

> „Ich mache mir keine Gedanken darüber, was die Leute von meiner Mathematik halten. Die Welt hat uns die Analysis noch nicht abbezahlt, und für die Lineare Algebra hat sie noch nicht einmal eine Anzahlung geleistet!“

... wobei Lineare Algebra und Analysis eben nur einen sehr sehr kleinen Teil dessen ausmachen, was Mathematik „leisten kann“.

Mit seiner Meinung steht Auslander nicht allein — ich stimme ihm da voll zu —, die Mathematik ist so ungemein nützlich und wichtig, dass sie allemal das Anrecht hat, gepflegt, gefördert und geschätzt zu werden. Lassen Sie dies — die Botschaft von der **Nützlichkeit** der Mathematik — einfach so im Raum stehen, und lassen Sie uns einen Sprung machen.

5

Es gibt nämlich auch eine ganz andere Seite der Mathematik — jenseits aller Fragen zu Nützlichkeit und Anwendbarkeit erfreut sich der Mathematiker an hübschen Ideen, brillanten Beweisen, genialen Verbindungen: mathematische Schönheit, Ästhetik, Eleganz. Das ist die Seite der Mathematik, die mich zu meinem Mathematik-Studium gezogen hat.

Mathematik ist eben auch ein Spiel, eine Herausforderung, ein Vorantasten, manchmal eine kriminalistische Rätselbeschäftigung, manchmal ein Wettrennen, und immer eine Suche: die Suche nach Beweisen. Wenn ein neuer Beweis gelungen ist, dann ist das Erfolg. Wenn das Resultat, das Problem wichtig und interessant war, dann ist der beendete Beweis auch der Moment des Erfolges.

Aber Mathematiker sind eben oft auch Ästheten; mit „irgendeinem“ Beweis sind sie nicht zufrieden. Am Ende soll der Beweis klar und verständlich sein (das ist Spielregel), wenn's geht kurz, trickreich aber elegant, überraschend, „schön einfach“ oder „einfach schön“: und das sind lauter ästhetische Maßstäbe! Wir sind auf der Suche nach den „perfekten“ Beweisen, Beweisen aus **DEM BUCH**, dem Buch der Beweise.

Von DEM BUCH gibt es viele verschiedene Varianten und Ausgaben, aber die bekannteste ist wohl die, von der Paul Erdős erzählt hat, ein legendärer ungarischer Mathematiker, der 1996 gestorben ist. Erdős erzählte von einem Buch, das der liebe Gott verwaltet, und in dem die perfekten mathematischen Beweise verzeichnet sind, die brillantesten Ideen und die schönsten

Abbildung 2: © Karl Heinrich Hofmann (TU Darmstadt)

Geistesblitze. Erdős sagte auch, dass man an Gott nicht zu glauben brauche, aber an DAS BUCH DER BEWEISE müsse man als Mathematiker glauben.

6

Wenn ich über das **BUCH DER BEWEISE** spreche, dann muss ich erklären, welche Bedeutung und welche Wichtigkeit Beweise in der Mathematik haben. Ein mathematischer Beweis ist eine Kette von Argumenten und Begründungen, die eine mathematisch formulierte Tatsache begründet. Dabei sind die Regeln und Bedingungen für einen korrekten, vollständigen Beweis so exakt und rigide, dass ein einmal etablierter Beweis auf Ewigkeit gültig ist. Mathematische Beweise haben damit eine viel größere Dauerhaftigkeit als die Entwürfe der Ingenieure, die Analysen der Philologen oder die Wahlprogramme der Politiker. Beweise sind Herz und Hirn der Mathematik, ihr Kern.

7

Hier ist (leider) nicht der Ort, echte „Brillanten aus dem BUCH DER BEWEISE“ herzuzeigen, vorzuführen, gegen's Licht zu halten, oder unter die Lupe zu nehmen. Aber *einen* kleinen Beweis wollen wir hier doch durchführen: einen „Klassiker“ aus der antiken, griechischen Mathematik, der ein fundamentales mathematisches Ergebnis ergibt, und in dem eine brillante Idee ausgeführt wird: ein Beweis dafür, daß

> Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Wenn es nur endlich viele Primzahlen gäbe, dann könnte man die aufzählen: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots, p_N$, wobei p_N die größte und letzte der Primzahlen bezeichnet. Und dann gäbe es die Zahl $P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_N + 1$: das Produkt *aller* Primzahlen plus eins. Dieses P ist eine natürliche Zahl, und die muß durch *irgendeine* Primzahl teilbar sein! Aber beim Teilen durch eine beliebige der Primzahlzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ergibt sich immer der Rest 1: nicht teilbar! Damit hat eben P doch noch einen anderen Primteiler, und unsere Annahme „Wenn es nur endlich viele Primzahlen gäbe“ war nicht richtig: und dieser Widerspruch beendet den Beweis.

Noch Fragen? Ja: zum Beispiel:

> Gibt es auch unendlich viele Primzahl-Zwillinge, die sich nur um 2 unterscheiden,
> wie 3 und 5, 5 und 7, 11 und 13, 17 und 19, *usw.*?

Das „*usw.?*“ markiert hier ein bis heute ungelöstes Problem. Oder, wie der Amateurmathematiker Christian Goldbach seinen Freund Euler fragte:

> „Stimmt es, dass man jede gerade Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen schreiben kann? Also $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, *usw.?*“

Für einen *Beweis* für dieses unscheinbare „*usw.?*“, die Goldbach-Vermutung, hat jetzt der Verlag Faber & Faber ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt – und zwei Jahre Zeit gegeben. Achtung, das Problem gilt als schwierig! Aber es ist auch spannend – siehe den Roman „Uncle Petros and the Goldbach Conjecture“ von Apostolos Doxiadis, erschienen bei Faber & Faber.

8

Nun sind manche Beweise unendlich kompliziert, und vielleicht nur für zwei Handvoll Mathematiker auf der gesamten Welt wirklich verständlich und durchdringbar. Das berühmteste Beispiel aus letzter Zeit ist der Beweis für den „Großen Satz von Fermat“, der besagt, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n \geq 3$ keine Lösungen in positiven ganzen Zahlen hat. Dagegen existieren ja für $n = 2$ viele Lösungen,

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \qquad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad \ldots$$

Das Fermat-Problem ist vor 350 Jahren von dem französischen Juristen und Mathematiker Pierre de Fermat gestellt worden, und erst vor kurzem von dem britischen Mathematiker Andrew Wiles endgültig gelöst worden. Sein Beweis ist schwierig, weil er riesige Theoriegebäude verwendet, aufbaut und verbindet. Er wird von den Experten, *die ihn verstehen*, als ausgesprochen „schön“ und „elegant“ und „brillant“ beschrieben: Ich selbst kann das nicht beurteilen, die Hilfsmittel des Beweises bewegen sich weit außerhalb meines eigenen Arbeitsgebietes. Im Zusammenhang mit dem berühmten Beweis von Andrew Wiles gibt es spannende Geschichten zu erzählen — der Beweis, den Wiles nach sieben Jahren intensivster und schwierigster Arbeit vorlegte, war eben nämlich nicht korrekt, hatte eine schwer sichtbare, aber auch irreparable Lücke, was nach sehr viel Ruhm, Presse, Aufsehen und Aufregung natürlich eine herbe Enttäuschung war. Um so dramatischer war der Wiederaufstieg des Beweises wie ein „Phönix aus der Asche“: Wiles konnte nämlich zu seinem falschen Beweisteil letztlich eine Alternative angeben, und damit doch einen korrekten Beweis zusammensetzen. Die Geschichte ist dramatisch und interessant, und sie liefert einen tollen Einblick in das Herz der Mathematik; Simon Singh hat sie aufgeschrieben und veröffentlicht, unter dem deutschen Titel „Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels“.

9

Das Bestehen auf *Präzision und Vollständigkeit* in mathematischen Argumenten ist keine Schikane, sondern sehr sehr notwendig. Es gibt eben berühmte Beispiele in der Mathematik, in denen die Wahrheit letztlich doch ganz anders aussieht, als man eigentlich gedacht und „fast“ bewiesen hatte. Ein „fast richtiger“ Beweis läßt sich auch für jede falsche Tatsache geben; „fast richtig“ ist in der Mathematik dasselbe wie „falsch“.

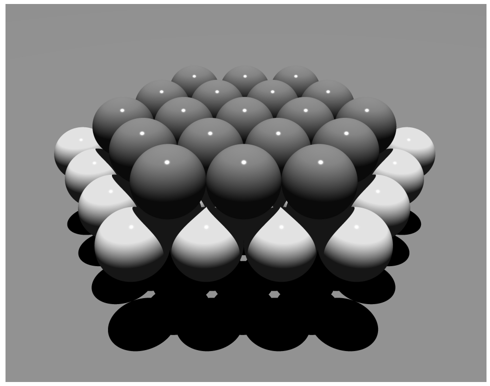

Abbildung 3: © Martin Henk (TU Magdeburg)

Ein wesentlicher Teil des Mathematikstudiums – ganz am Anfang, klassischerweise in den Grundvorlesungen zur *Linearen Algebra* und zur *Analysis* – besteht dementsprechend im Erlernen und Üben einer Sprache: der präzisen Sprache, in der Mathematiker Definitionen, Voraussetzungen, Aussagen, und besonders dann Beweise formulieren. (Eine schöne Sprache, die mancher kunstvoll verwendet, mancher zu achtlos, und die letztlich nur im „Selber sprechen" und in verschiedensten Stilübungen perfekt zu lernen ist.)

10

Auch eine Computer-Rechnung kann einen Beweis nicht ersetzen. Ein Beispiel: Der Satz von Fermat sagt für $n = 3$, dass $z^3 = x^3 + y^3$ keine Lösung in positiven ganzen Zahlen hat, keine Zahl läßt sich in zwei Kuben zerlegen: $9^3 = 8^3 + 6^3$ gilt „ungefähr", aber eben nicht genau. Genauso könnte man (mit Leonhard Euler) vermuten, dass sich auch keine Zahl in drei Biquadrate erlegen läßt, dass also $z^4 = x^4 + y^4 + u^4$ keine positiv-ganzzahlige Lösung hat. Für jedes feste z läßt sich das leicht überprüfen, weil es nur endlich viele Möglichkeiten gibt. Ein schneller Computer rechnet leicht nach, dass für die ersten zehntausend Werte von z keine Lösung existiert. Aber für *alle* z? Ein **Beweis** ist die Computerrechnung eben nicht; und in der Tat:

$$422481^4 \quad = \quad 95800^4 + 217519^4 + 414560^4 \ !$$

11

Eine ähnlich dramatische Geschichte wie zum Fermat-Problem gibt es zum „Kepler-Problem" von 1611 zu erzählen: der Frage, wie dicht sich Kugeln gleicher Größe (Orangen, Tischtennisbälle, Kanonenkugeln …) im 3-dimensionalen Raum denn packen lassen. Dieses Problem hat eine offensichtliche Lösung, die jeder Gemüsehändler kennt, der Orangen aufstapeln muss. Nur ist eine „offensichtliche Lösung" noch lange kein mathematischer Beweis. Der chinesisch-amerikanische Mathematiker Hsiang veröffentlichte 1993 einen „Beweis" des Kepler-Problems. Natürlich wurde dies von der Presse gefeiert, von den Fachkollegen aber kritisch begutachtet – und dabei stellte sich die vermeintliche Lösung des Problems als eine lückenhafte und teilweise auch fehlerhafte Beweis-Skizze heraus — bestenfalls, aber eben kein *Beweis* im Sinne der Mathematik.

Das Problem war also weiter ungelöst. Und in diesem Fall hat im August 1998 Thomas C. Hales (University of Michigan) eine Lösung vorgelegt: einen langen und komplizierten Beweis, der sich auf umfangreiche Computer-Berechnungen für eine großen Fallunterscheidung stützt. Also viel Rechnung, viel Computer, viel harte Arbeit: Und dahinter steckt eben doch sehr viel Mathematik, eine Menge brillanter Ideen, manche von Hales, manche von seinen Vorgängern. Die Geschichte ist deshalb noch nicht zu Ende, weil dieser neue Beweis eben auch aufmerksam gelesen, verstanden und die Rechnungen überprüft werden müssen. Dies dauert im Moment noch an.

12

Also: in der Mathematik stehen neben den kleinen Geistesblitzen und dem schnellen Erfolg auch harte Nüsse und schwierige, lange Beweise: aber umso mehr geht die Suche nach den „Brillanten" weiter! Und ich glaube, dass die Freude an der Eleganz, die Herausforderung, das Spiel, und die Suche nach der Schönheit, nach den perfekten Beweisen aus dem BUCH der Beweise – genauso wie die Nützlichkeit und Anwendbarkeit von Mathematik und ihren Methoden – gültige, schöne und *kraftvolle* Motivation für ein Studium der Mathematik geben können.

Literatur

- H. M. Enzensberger: Zugbrücke ausser Betrieb – Die Mathematik im Jenseits der Kultur, A. K. Peters, Natick, Massachusetts 1998.
- K.-H. Hoffmann, W. Jäger, T. Lohmann & H. Schunck (Hrsg.): Mathematik: Schlüsseltechnologie für die Zukunft. Verbundprojekte zwischen Universität und Industrie, Springer-Verlag, Heidelberg 1997.
- M. Aigner & Ziegler: Proofs from THE BOOK, Springer-Verlag, Heidelberg 1997.
- S. Singh: Fermat's Letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels, Carl Hanser Verlag, München 1998 und dtv, München 1999.
- A. Beutelspacher: „Das ist o.B.d.A trivial!". Tips und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken, Vieweg, Wiesbaden, 5. Auflage 1999.
- A. Doxiadis: Uncle Petros and the Goldbach Conjecture, Faber & Faber, London 2000.