

Kugeln im Computer

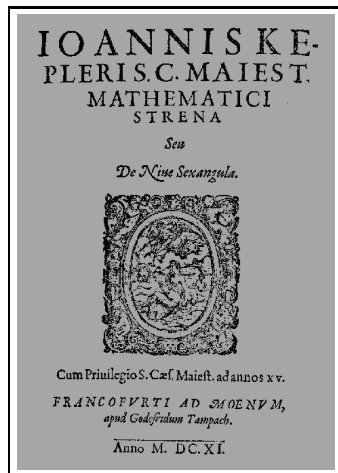
Die Kepler-Vermutung

Martin Henk

Günter M. Ziegler

Eine ganz harte Nuß

Wie so oft begann alles ganz harmlos, vor sehr langer Zeit – es ist fast vierhundert Jahre her. Im Jahre 1611 veröffentlichte der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler [6] ein Büchlein mit dem interessanten Titel „Vom Sechseckigen Schnee“, das er seinem Freund und Gönner, dem Prager Hofrat Wackher von Wackenfels, als Neujahrsgabe widmete.

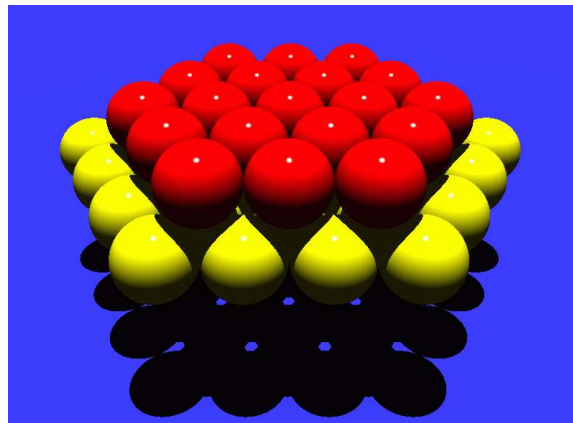


Johannes Kepler „Vom Sechseckigen Schnee“

Er diskutierte darin in der Natur auftretende Formen und Muster, darunter nicht nur Schneeflocken, sondern auch die Kerne von Granatäpfeln, von denen sehr viele auf sehr kleinen Raum „gepackt“ sind. Dies führte ihn zur Betrachtung verschiedener Anordnungen (*Packungen*) sich nicht überlappend, kongruenter Kugeln im 3-dimensionalen Raum. Er verglich den Anteil des von den Kugeln jeweils überdeckten Raumes am Gesamttraum: die *Dichte* der jeweiligen Packung.

Eine dieser Packungen ist heute als die flächenzentrierte kubische Gitterpackung, die *fcc-Packung*, bekannt. Sie läßt sich auf ganz unterschiedliche Weisen konstruieren und beschreiben, beispielsweise folgendermaßen:

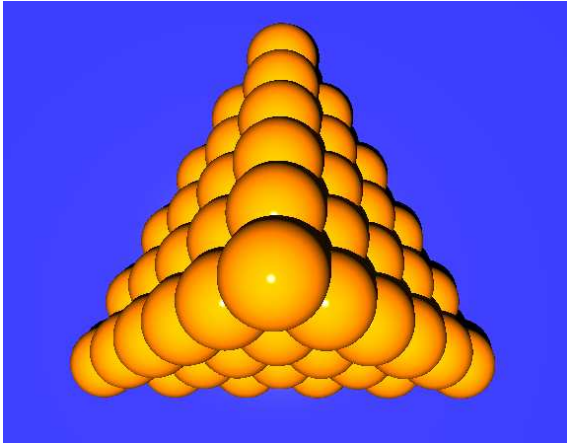
Zunächst wird eine Grundschrift von Kugeln konstruiert, in der jede Kugel von sechs anderen Kugeln berührt wird – eine *hexagonale Packung* in der Ebene. Nun wird eine Kopie dieser Schicht so auf die Grundschrift gelegt, daß die Kugeln in die „Lücken“ der ersten Schicht fallen.



Stapeln von hexagonalen Schichten

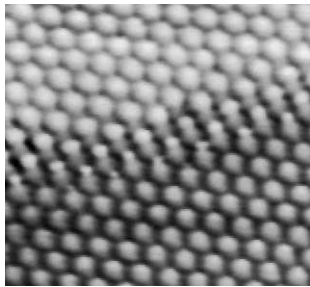
Die zweite Schicht entsteht also aus der Grundschrift durch Translation um einen gewissen Vektor \mathbf{t} . Im weiteren werden nun Kopien der Grundschrift „nach unten und nach oben“ gestapelt, so daß jede Schicht aus der Grundschrift durch Translation um ein Vielfaches des Vektors \mathbf{t} entsteht.

Betrachtet man einen pyramidenförmigen Ausschnitt dieser Packung, so erinnert die Anordnung an einen Haufen Kanonenkugeln oder an zum Verkauf aufgeschichtete Orangen.



Pyramidenförmiger Ausschnitt der fcc-Packung

Dasselbe Packungsmuster kommt aber auch in besonders dichten Kristallen vor: so kann man mit dem Rastertunnelmikroskop direkt „sehen“, daß zum Beispiel in reinem Gold die einzelnen Atome nach einem fcc-Muster „aneinandergepackt“ sind.



Gold (111)

Mittels der fcc-Packung wird der 3-dimensionale Raum recht dicht durch Kugeln ausgefüllt, das heißt, die nicht überdeckten Zwischenräume erscheinen klein. Man kann nun leicht ausrechnen – und wir werden dies im folgenden auch tun – daß die fcc-Packung gut 74% des Raumes ausfüllt. Genauer gesagt beträgt die Dichte der fcc-Packung $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,74048\dots$. Sie ist nur eine unter unendlich vielen verschiedenen Packungen der Dichte $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$. Kepler war jedoch davon überzeugt, daß es keine Packung mit einer größeren Dichte geben kann: die **Kepler-Vermutung** war geboren!

Die Geschichte dieser Vermutung ist spannend, umfaßt inzwischen fast vier Jahrhunderte, und ist durchaus noch nicht zu Ende. Die größten Helden der Mathematikgeschichte haben sich

mit dem Problem beschäftigt – darunter Carl Friedrich Gauß, der den Spezialfall einer 3-dimensionalen „Gitterpackung“ löste, und David Hilbert, der es in seine legendäre Problem-liste aufnahm, die er im Jahr 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris präsentierte. Dies hat dem Problem viel Aufmerksamkeit und Prominenz gebracht – aber keine schnelle Lösung.

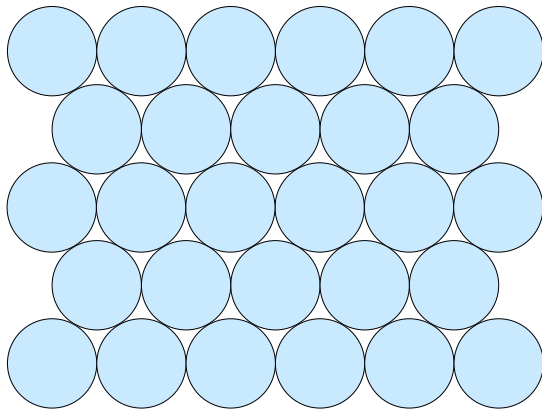
“It’s one of those problems that tells us that we are not as smart as we think we are.”

(D. J. Muder)

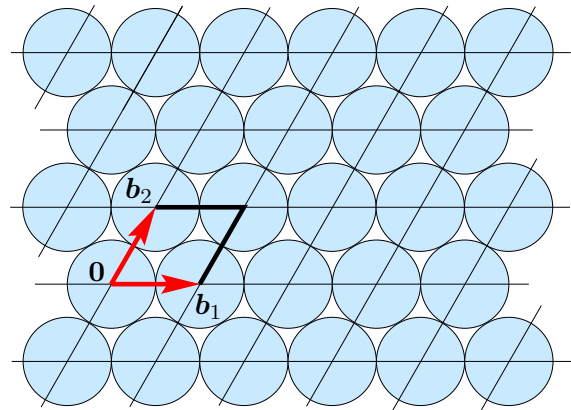
Die folgenden Ausführungen sollen an das Problem heranführen. Dabei hangeln wir uns an den einzelnen Fortschritten entlang, die im Laufe der Jahrhunderte von Legendre, Gauß, Thue, Fejes Tóth und anderen in Richtung auf eine Lösung des Problems gemacht wurden. Für die einfacheren Resultate wollen wir die Beweise andeuten, für die komplizierteren den Ansatz zumindest skizzieren. Im Laufe der Diskussion wollen wir sehen, „wo eigentlich das Problem liegt“ und vielleicht ein Gefühl dafür entwickeln, warum das Problem so böse ist, und so kontrovers. Nicht umsonst hat es um die Lösung des Problems in den letzten Jahren Streit gegeben (der auch noch nicht ganz vorbei ist ...).

In der Ebene

Kreisscheiben gleicher Größe (zum Beispiel vom Radius 1 und Flächeninhalt π) lassen sich ziemlich dicht in der Ebene anordnen. Das Bild zeigt einen Ausschnitt aus einer *hexagonalen Packung* \mathcal{K}_{hex} , in der jeder Kreis von sechs anderen Kreisen berührt wird.



Hexagonale Packung \mathcal{K}_{hex} von Kreisscheiben



Ein fundamentales Parallelogramm und seine Translate

Diese Packung ist sehr regelmäßig – sie ist eine *Gitterpackung*. Wir geben jetzt eine Definition von Gitterpackungen die in beliebiger Dimension funktioniert, was später dann noch nützlich sein wird:

Definition 1 (Gitterpackungen)

Die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen von d Vektoren, die den d -dimensionalen Raum aufspannen (einer *Basis*) heißt *Gitter*. Eine *Gitterpackung* von Kugeln ist dadurch charakterisiert, daß die Kugelmittelpunkte ein *Gitter* bilden.

Die Menge der Linearkombinationen der Basisvektoren eines Gitters mit Koeffizienten zwischen 0 und 1 heißt *Fundamental-Parallelotop* des Gitters.

Wenn wir dies für die Ebene spezialisieren, so wird aus dem Parallelotop ein Parallelogramm, das von zwei Basisvektoren aufgespannt wird. Betrachten wir etwa das Gitter A_2 mit den beiden Basisvektoren $\mathbf{b}_1 = (2, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, \sqrt{3})$, so erhalten wir als zugehörige Gitterpackung die hexagonale Gitterpackung \mathcal{K}_{hex} . Wir sehen, daß die Translate eines Fundamental-Parallelotops bezüglich der Vektoren im Gitter eine Pflasterung des Raums ergeben.

Man beachte, daß die Basis des Gitters und somit die Form eines Fundamental-Parallelotops nicht eindeutig sind. Man kann jedoch zeigen, daß das *Volumen* $\text{vol}(P)$ des Fundamental-Parallelotops P immer dasselbe ist.

Weil eine Gitterpackung \mathcal{K} in jedem Fundamental-Parallelotop P „gleich aussieht“, kann man ihre *Dichte* $\delta(\mathcal{K})$ wie folgt definieren:

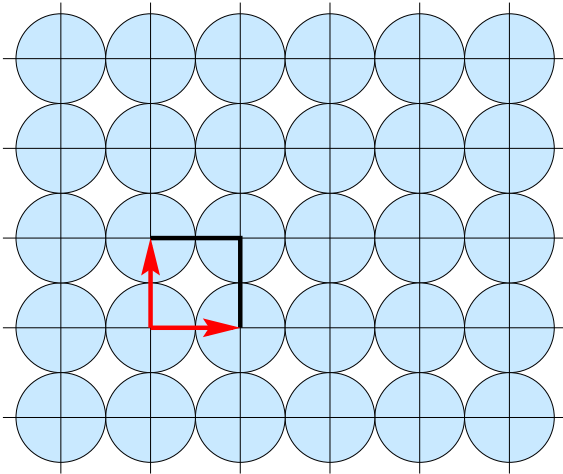
$$\delta(\mathcal{K}) := \frac{\text{vol}(\mathcal{K} \cap P)}{\text{vol}(P)},$$

also der Anteil des Volumens eines Fundamental-Parallelotops, der durch die Kugeln der Packung überdeckt wird. Man überzeugt sich recht leicht, daß der erhaltene Wert nicht von der Wahl des Fundamental-Parallelotops abhängt; dies liegt daran, daß es für jede Gitterpackung immer genau „eine Kreisscheibe pro Parallelotop“ gibt.

Für eine hexagonale Kreispackung \mathcal{K}_{hex} ist die Dichte jetzt leicht zu berechnen: das in der Zeichnung gewählte Parallelogramm hat Grundlinie $a = 2$ und Höhe $h = \sqrt{3}$, also Fläche $\text{vol}(P) = ah = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$. Es enthält vier Kreissegmente, die sich gerade zu einer vollständigen Kreisscheibe zusammensetzen lassen. Damit erhalten wir eine Dichte von

$$\delta(\mathcal{K}_{\text{hex}}) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0,9068... .$$

Also über 90%: ziemlich gut!



Quadratische Packung $\mathcal{K}_{\text{quad}}$ von Kreisscheiben

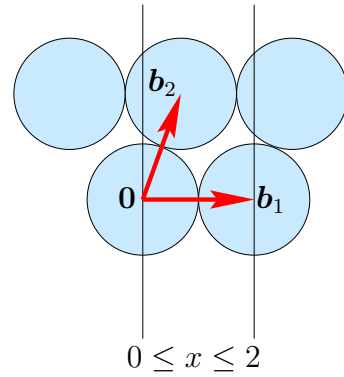
Man vergleiche dies mit der Dichte einer *quadratischen* Packung $\mathcal{K}_{\text{quad}}$, für die die analoge Rechnung ergibt:

$$\delta(\mathcal{K}_{\text{quad}}) = \frac{\pi}{4} \approx 0,7853\dots$$

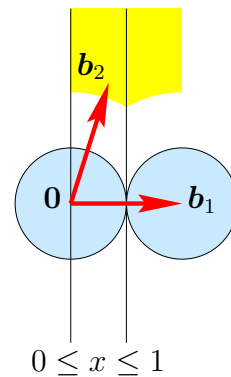
Satz 2 (Legendre 1773)

Eine Gitterpackung von Kreisscheiben hat höchstens die Dichte $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$, und dieser Wert wird nur durch hexagonale Gitterpackungen erreicht.

Beweis. Erst müssen wir uns das Gitter „zurechtrücken“. Zunächst suchen wir uns einen kürzesten Vektor \mathbf{b}_1 in unserem Gitter und drehen dann unsere gesamte Gitterpackung so, daß dieser Vektor auf der positiven x -Achse liegt. Die Länge von \mathbf{b}_1 ist sicherlich mindestens 2, da sich ja die beiden Kreisscheiben mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und \mathbf{b}_1 nicht überlappen dürfen. Wir können sogar annehmen, daß die Länge von \mathbf{b}_1 gleich 2 ist: andernfalls würden sich in unsere Gitterpackung keine zwei Kreisscheiben berühren, und dann wäre sie bestimmt nicht optimal. Damit haben wir einen ersten Basisvektor $\mathbf{b}_1 = (2, 0)$ zur Verfügung.



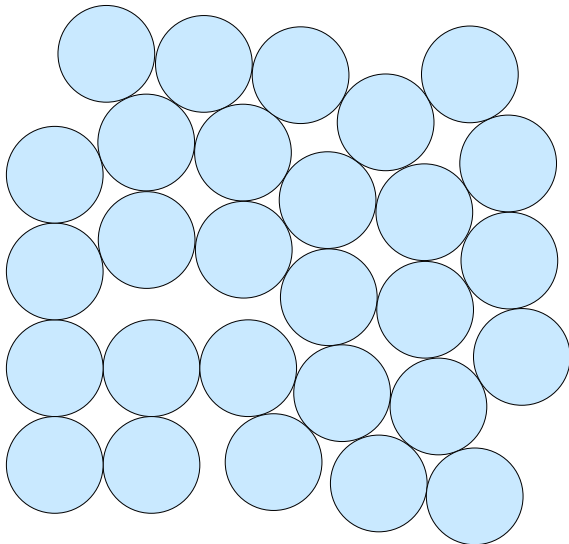
Den zweiten Basisvektor wählen wir uns wiederum „so kurz wie möglich“. Daraus folgt automatisch, daß er in dem Streifen liegt, der durch $-2 \leq x \leq 2$ gegeben ist: denn mit \mathbf{b}_2 ist auch $\mathbf{b}_2 + k\mathbf{b}_1$ ein möglicher zweiter Basisvektor, für beliebiges ganzzahliges k . Wenn wir jetzt auch noch ausnutzen, daß wir \mathbf{b}_2 durch sein negatives ersetzen dürfen, und auch die ganze Packung an der x -Achse spiegeln können, dann ergibt sich, daß \mathbf{b}_2 auf einen Punkt (x, y) in dem Streifen zeigt, der durch $0 \leq x < 1$, $y \geq 0$ gegeben ist. Und weiter: der Punkt hat von $\mathbf{0}$, und von \mathbf{b}_1 , mindestens den Abstand 2.



Dann folgt aber schon aus unsere Zeichnung, daß die Höhe (y -Koordinate) des Punktes, auf den \mathbf{b}_2 zeigt, mindestens $\sqrt{3}$ ist, was einem gleichseitigen Dreieck entspricht. Und der Minimalwert $y = \sqrt{3}$ wird nur für $x = 1$ erreicht, was genau einer hexagonalen Packung entspricht.

Damit ist alles gezeigt: die Fläche des Fundamental-Parallelogramms ist nämlich genau durch $\text{vol}(P) = ah = 2y$ gegeben, und diese müssen wir minimieren, um maximale Dichte zu erreichen! \square

Für allgemeine Packungen, für die die Kugelmittelpunkte nicht entlang eines Gitters angeordnet sind, können wir die bisher verwendeten Konzepte von „Basis“ und „Fundamental-Parallelotop“ nicht definieren, und nicht verwenden.



Eine unregelmäßige Packung von Kreisscheiben

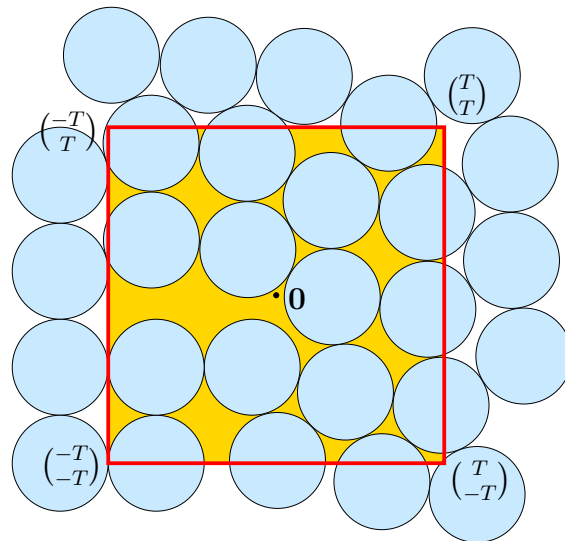
Es stellt sich heraus, daß schon die geeignete Definition der „Dichte“ einer allgemeinen Kreispackung in der Ebene Probleme aufwirft. Im folgenden betrachten wir nur eine mögliche Definition: den oberen Grenzwert über eine „zentrierte Schachtel“.

Definition 3 (Dichte einer Kugelpackung)

Die Dichte $\delta(\mathcal{K})$ einer Kugelpackung \mathcal{K} im \mathbb{R}^d ist der größte Häufungspunkt des Anteils, zu dem sie die „große zentrierte Schachtel“ $[-T, T]^d$ ausfüllt, also

$$\delta(\mathcal{K}) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathcal{K} \cap [-T, T]^d)}{\text{vol}([-T, T]^d)},$$

wobei für das Volumen der Schachtel gilt: $\text{vol}([-T, T]^d) = (2T)^d$.



Die Dichte der Kreisscheibenpackung in einer großen Schachtel gemessen

Benutzt man anstelle der „zentrierten Schachtel“ eine andere Menge zum „Ausschöpfen des Raumes \mathbb{R}^d “ (z. B. eine große Kugel mit Radius T), oder ersetzt man den oberen Grenzwert der Folge durch den unteren, dann kommen für geeignete Beispiele unterschiedliche Werte heraus. Man kann aber für all die verschiedenen Definitionen zeigen, daß es optimale Packungen gibt, für die die Grenzwerte wirklich existieren und übereinstimmen. Im Falle einer Gitterpackung liefern alle diese Definitionen denselben Wert wie die Definition, die wir vorhin angegeben haben.

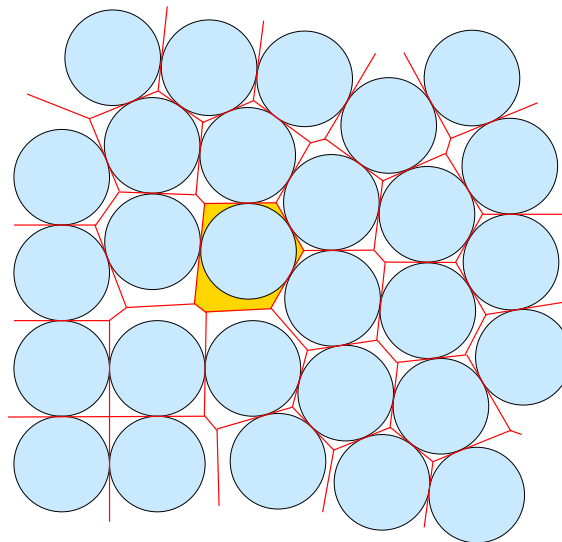
Es gibt nun ganz verschiedene Hinweise darauf, daß die Situation für allgemeine Packungen sehr viel komplizierter ist als für Gitterpackungen. Zum Beispiel: wenn wir aus einer beliebigen Packung eine, oder endlich viele, Kreisscheiben entfernen, dann ändert sich die Dichte nicht! Und man kann ganz leicht Packungen konstruieren, die nicht hexagonal sind, und in denen sich gar keine Kreisscheiben berühren, die aber trotzdem die Dichte $\delta(\mathcal{K}_{\text{hex}})$ der hexagonalen Packung haben! Also kann zumindest die „Eindeutigkeit der Optimallösung“ aus Legendres Satz nicht mehr gelten.

Trotzdem: besser als hexagonal geht's nicht! Dies hat „im Prinzip“ der norwegische Mathematiker Axel Thue als erster bewiesen. Er kündigte dieses Resultat im Jahre 1892 an, veröffentlichte aber erst im Jahre 1910 eine Ar-

beit dazu. Der dort angegebene Beweis enthält jedoch eine Lücke, die um 1940 unabhängig von Fejes Tóth und von Segre und Mahler geschlossen wurde.

Satz 4 (Thue 1892, ...)

Eine beliebige Packung von Kreisscheiben in der Ebene hat höchstens die Dichte $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$, und dieser Wert wird (unter anderen) durch hexagonale Gitterpackungen erreicht.



Die Voronoi-Zellen einer Kreisscheibenpackung

Die Haupt-Idee, oder jedenfalls der erste wesentliche Schritt, liegt darin, daß man sich von der „großen Schachtel“ löst, denn wir haben ja keine Kontrolle darüber, wo und wie die Kreisscheiben in einer großen Schachtel liegen. Stattdessen betrachtet man die Zerlegung des Raumes in Voronoi-Zellen: eine Konstruktion aus der Kristallographie, die sich inzwischen auch in ganz anderen Gebieten wie der Algorithmischen Geometrie (“Computational Geometry”) als ungemein nützlich herausgestellt hat. Die folgende Formulierung ist wieder auf den Fall allgemeiner Dimension zugeschnitten.

Definition 5 (Voronoi-Zerlegung)

Sei $\Omega = \Omega(\mathcal{K})$ eine diskrete Menge von Punkten im \mathbb{R}^d , beispielsweise die Menge der Mittelpunkte einer Kugelpackung.

Für jeden Punkt $\mathbf{v} \in \Omega$ ist die Voronoi-Zelle $\text{Vor}(\mathbf{v})$ die Menge derjenigen Punkte im \mathbb{R}^d , für die \mathbf{v} ein „nächster Punkt“ aus Ω ist, das heißt,

$$\text{Vor}(\mathbf{v}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \Omega)\}.$$

Die Voronoi-Zelle $\text{Vor}(\mathbf{v})$ ist immer ein konvexer Polyeder. Wenn Ω wirklich die Menge der Mittelpunkte einer Packung von Kugeln gleicher Größe ist, dann enthält $\text{Vor}(\mathbf{v})$ auch die Kugel mit Mittelpunkt \mathbf{v} . Für eine Gitterpackung sind alle Voronoi-Zellen kongruent, und im Falle von \mathcal{K}_{hex} sind alle Voronoi-Zellen reguläre Sechsecke mit dem Flächeninhalt $2\sqrt{3}$.

Mit diesen Konzepten zur Hand reicht es zum Beweis des Satzes von Thue aus, das folgende zu zeigen.

Satz 6

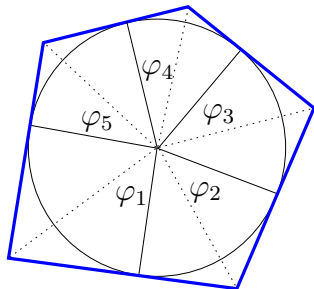
In einer ebenen Packung von Kreisscheiben vom Radius 1 hat jede Voronoi-Zelle mindestens die Fläche $2\sqrt{3}$.

Der Beweis dafür ist trickreich (siehe [3, Seiten 62-63]) und wir geben deshalb hier nur eine kleine Plausibilitätsüberlegung.

Sei K eine Kreisscheibe vom Radius 1. Wenn nun P ein konvexes n -Eck ist, das die Kreisscheibe K enthält, dann hat P mindestens den Flächeninhalt eines regelmäßigen K umschriebenen n -Ecks, das heißt,

$$\text{vol}(P) \geq n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Dies gewinnt man daraus, daß offenbar



mit den Bezeichnungen der Abbildung

$$\text{vol}(P) = \tan\left(\frac{\varphi_1}{n}\right) + \dots + \tan\left(\frac{\varphi_n}{n}\right)$$

gilt, die Tangens-Funktion im Bereich $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ konvex ist (ein bißchen Analysis ...), und $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = \pi$ gilt. Daraus folgt dann, daß ein konvexes Dreieck, Viereck, Fünfeck oder Sechseck, das eine Kreisscheibe K enthält, immer mindestens den Flächeninhalt $2\sqrt{3}$ hat. Es bleiben also die Voronoï-Zellen $\text{Vor}(\mathbf{v})$ zu betrachten, die mehr als sechs Ecken aufweisen. Da ja auch die Mittelpunkte der Nachbar-Zellen von $\text{Vor}(\mathbf{v})$ untereinander mindestens den Abstand 2 besitzen, können aber in diesem Fall nicht alle Kanten der Voronoï-Zelle den Mindestabstand 1 zu dem Mittelpunkt der Zelle haben. Dies läßt sich nun wiederum mit einigem Aufwand dazu ausnutzen zu zeigen, daß solche Zellen größeren Flächeninhalt haben als $2\sqrt{3}$.

In die dritte Dimension

Wir machen jetzt den Sprung in die dritte Dimension! Wie wir wissen, handelt es sich bei der fcc-Packung \mathcal{K}_{fcc} , die wir in der Einleitung beschrieben haben, um eine Gitterpackung: Die Grundsicht von Kugeln wurde gerade von einer hexagonalen Packung gebildet, und diese haben wir dann um Vektoren $z\mathbf{t}$, $z \in \mathbb{Z}$, verschoben, so daß die Kugeln einer oberen Schicht in die Lücken fallen, die von Kugeln der darunter liegenden Schicht frei gelassen werden. Wählen wir etwa die Vektoren $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 0)$ und $\mathbf{a}_2 = (1, \sqrt{3}, 0)$ als Basisvektoren eines Gitters, welches die hexagonale Gitterpackung von Kugeln mit Radius 1 in der Grundsicht beschreibt, so können wir $\mathbf{t} = (1, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}})$ setzen.

Das von diesen drei Basisvektoren erzeugte Gitter

$$A_3 := \{z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + z_3\mathbf{t} : z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}\}$$

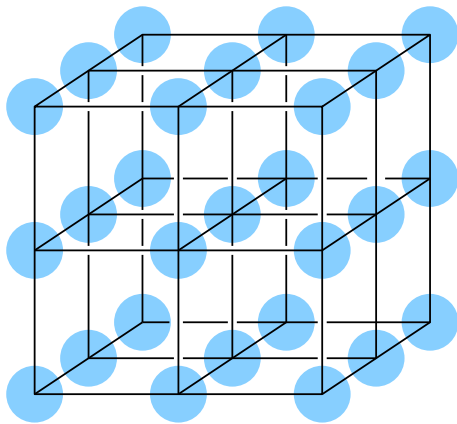
wird auch als *Tetraeder-Gitter* bezeichnet, da die Basisvektoren zusammen mit $\mathbf{0}$ die Ecken eines regulären Tetraeders der Kantenlänge 2 bilden. Dies kann man auch dadurch ausdrücken, daß die Basisvektoren paarweise einen Winkel von 60° einschließen. Das Volumen eines Fundamental-Parallelotops von A_3 beträgt $4\sqrt{2}$. Da das Volumen einer Kugel mit Radius 1 gleich $\frac{4}{3}\pi$ ist, können wir nun mit unsere Formel für die Dichte von Gitterpackungen aus Definition 3 die Dichte der fcc-Packung „wirklich“ ausrechnen:

$$\delta(\mathcal{K}_{\text{fcc}}) = \frac{\frac{4}{3}\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}}.$$

Dies ist aber nicht die einzig mögliche Darstellung einer fcc-Packung als Gitterpackung, und im folgenden wird unser erstes Anliegen sein, das der fcc-Kugelpackung zugrunde liegende Gitter (das *fcc-Gitter*) in seinen verschiedenen Darstellungen besser zu verstehen.

Eine wichtige Version des fcc-Gitters ist das sogenannte D_3 -Gitter. Dafür startet man mit dem *kubischen* Gitter $\mathcal{K}_{\text{cubic}} = \mathbb{Z}^3$, in dem an jedem Gitterpunkt mit ganzzahligen Koordinaten eine Kugel des Radius $\frac{1}{2}$ sitzt, also mit Volumen $V = (\frac{1}{2})^3 \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{6}$. Dabei wird der Einheitswürfel $[0, 1]^3$ zum Fundamental-Parallelotop, und der zentrierte Einheitswürfel $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ bildet eine Voronoï-Zelle, beide vom Volumen 1. Somit hat die kubische Gitterpackung die Dichte

$$\delta(\mathcal{K}_{\text{cubic}}) = \frac{\pi}{6}.$$

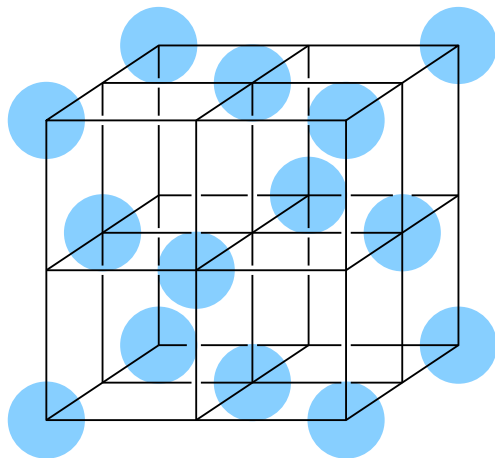


Kugeln im kubischen Gitter

Diese kubische Gitterpackung kann man leicht verbessern: wenn man nämlich jede zweite Kugel entfernt (also beispielsweise diejenigen Kugeln, deren Koordinatensumme ungerade ist), so bleibt viel Luft. Der kleinste Abstand zwischen Kugelmittelpunkten ist jetzt $\sqrt{2}$. Also haben wir nur noch jede zweite von den ursprünglichen Kugeln, können aber die verbliebenen alle um den Faktor $\sqrt{2}$ vergrößern, was ihr Volumen um den Faktor $2\sqrt{2}$ vergrößert. Mit anderen Worten: die Gitterpackung, deren Mittelpunkte durch die Menge

$$D_3 := \{z \in \mathbb{Z}^3 : z_1 + z_2 + z_3 \text{ ist gerade}\}$$

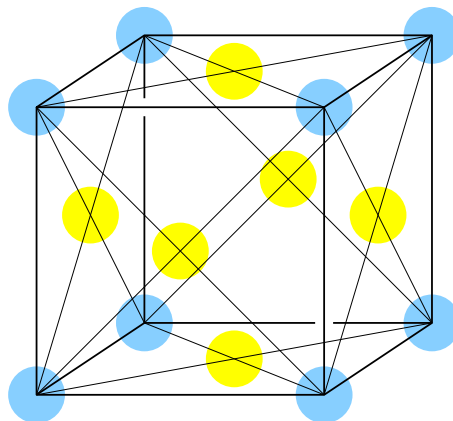
gegeben ist, hat Dichte $\frac{2\sqrt{2}}{2}\delta(\mathcal{K}_{\text{cubic}}) = \frac{\pi}{\sqrt{18}} = \delta(\mathcal{K}_{\text{fcc}})$.



Kugeln im D_3 -Gitter

Aber wir hätten die kubische Gitterpackung auch ganz anders verbessern können; zum Beispiel, indem man in die kubische Gitterpackung

neue Kugeln einsetzt, und zwar immer an die Mittelpunkte der (2-dimensionalen) Flächen der Einheitswürfel. Man überzeugt sich schnell, daß dann Kugeln genau an den Punkten mit halb- und ganzzahligen Koordinaten sitzen, deren Koordinatensumme ganzzahlig ist. Dies ist aber gerade die Punktmenge D_3 , um den Faktor $\frac{1}{2}$ verkleinert.



Kugeln im fcc-Gitter

Auch wenn die beiden beschriebenen Gitter A_3 und D_3 „unterschiedlich aussehen“, so sind sie doch „mathematisch gleich“; wir können sie mittels einer Drehung und Streckung ineinander überführen. Dazu beobachtet man, daß die Vektoren $\mathbf{d}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{d}_2 = (1, 0, 1)$ und $\mathbf{d}_3 = (0, 1, 1)$ eine Basis von D_3 bilden und paarweise einen Winkel von 60° miteinander bilden. Folglich können wir die Menge von Vektoren $\{\sqrt{2}\mathbf{d}_i : i = 1, 2, 3\}$ so drehen, daß sie mit den Basisvektoren $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{t}\}$ von A_3 übereinstimmen.

In einer „Anzeige“ (was wir heute eine Rezension nennen würden) eines Buches von Ludwig August Seeber bewies Carl Friedrich Gauß 1831 eine Aussage über ternäre quadratische Formen, die er dann noch geometrisch interpretierte und aus der sich leicht die Optimalität der fcc-Packung innerhalb der Familie der Gitterpackungen ergibt.

Satz 7 (Gauß 1831)

Eine Gitterpackung von Kugeln im \mathbb{R}^3 hat höchstens die Dichte $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$, und dieser Wert wird nur durch fcc-Gitterpackungen erreicht.

Beweis. Wir gehen ähnlich vor wie im 2-dimensionalen Fall, und suchen uns im gegebenen Gitter zunächst einen kürzesten Basisvektor \mathbf{b}_1 , dann einen zweit-kürzesten Basisvektor \mathbf{b}_2 , und abschließend einen dritt-kürzesten \mathbf{b}_3 . Seien die quadrierten Längen dieser Basisvektoren mit $\|\mathbf{b}_1\|^2 = a$, $\|\mathbf{b}_2\|^2 = b$, $\|\mathbf{b}_3\|^2 = c$ und ihre Skalarprodukte mit $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle = a'$, $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3 \rangle = b'$ und $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = c'$ bezeichnet. Es ist nun leicht zu sehen, daß wir annehmen dürfen, daß die Zahlen a', b', c' entweder alle nicht-negativ oder alle nicht-positiv sind. Der Einfachheit halber behandeln wir hier nur den Fall $a', b', c' \geq 0$ – die andere Konstellation kann „fast genauso“ behandelt werden.

Wir betrachten nun das von den drei Vektoren aufgespannte Fundamental-Parallelepiped P , und verschaffen uns irgendwoher die Volumenformel

$$\text{vol}(P)^2 = abc - a(a')^2 - b(b')^2 - c(c')^2 + 2a'b'c'$$

Nun gilt, weil wir ja eine Basis mit kürzesten Vektoren gewählt haben, daß $\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$ jedenfalls nicht kürzer sein darf als \mathbf{b}_i (für $1 \leq i \neq j \leq 3$), weil man ja mit „ $\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$ statt \mathbf{b}_i “ ebenfalls eine Basis erhalten würde. Also erhält man sechs Ungleichungen vom Typ

$$b + a - 2c' = \|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|^2 \geq \|\mathbf{b}_2\|^2 = b,$$

und damit

$$a - 2c' \geq 0, \quad a - 2b' \geq 0, \quad b - 2a' \geq 0, \quad \text{usw.}$$

Nun schreibt man sich die Volumenformel nochmal (etwas trickreich ...) geeignet hin:

$$\begin{aligned} 2 \text{vol}(P)^2 &= abc + \\ &+ aa'(b - 2a') + bb'(c - 2b') + cc'(a - 2c') \\ &+ a'(a - 2b')(b - 2c') + b'(b - 2c')(c - 2a') \\ &+ c'(c - 2a')(a - 2b') \\ &+ (a - 2b')(b - 2c')(c - 2a') \geq abc \end{aligned}$$

und sieht daraus sofort

$$\text{vol}(P)^2 \geq \frac{abc}{2}.$$

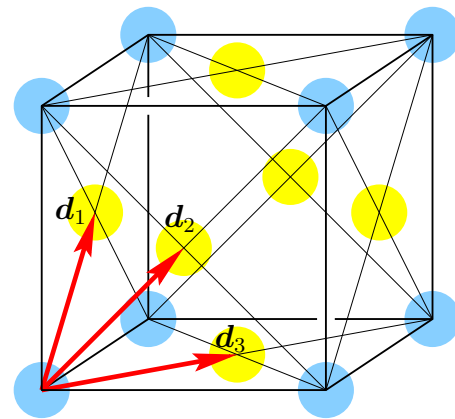
An dieser Stelle sei bemerkt, daß Seeber zwar diese Ungleichung vermutete, aber in seinem

Artikel nur den Faktor 3 beweisen konnte. Dies veranlaßte Gauß zu seinem Beweis, welchen er mit den Worten einleitet „[...] hier, um auch unsererseits in dieser Anzeige einen Beitrag zur Vervollkommnung der Theorie zu geben, einen sehr einfachen Beweis beifügen.“ – für den Faktor 2.

Nun haben wir es hier aber mit einer Gitterpackung zu tun, also sind $a, b, c \geq 4$ und so

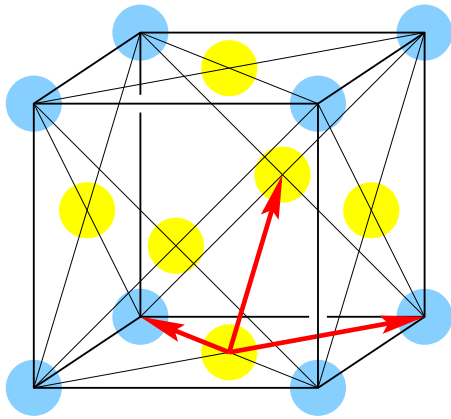
$$\text{vol}(P) \geq \sqrt{\frac{1}{2}abc} \geq 4\sqrt{2}.$$

Mit anderen Worten, das Volumen eines Fundamental-Parallelepipedes einer Kugelgitterpackung ist stets größer als $4\sqrt{2}$, dem Volumen eines Fundamental-Parallelepipedes einer fcc-Packung. Wann tritt Gleichheit auf? Dafür unterscheiden wir zwei Fälle: im ersten wird angenommen, daß a', b' und c' alle drei nicht Null sind. Dann muß für Gleichheit offensichtlich $a = b = c = 2a' = 2b' = 2c' = 4$ gelten, und die Basisvektoren bilden zusammen mit $\mathbf{0}$ die Ecken eines regulären Simplex der Kantenlänge 2. Unsere Abbildung zeigt eine entsprechende Basis im fcc-Gitter – dies ist gerade die zuvor erwähnte Basis $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$.



Eine kürzeste Basis im fcc-Gitter

Im zweiten Fall dürfen wir annehmen, daß $a' = 0$ ist. Dann kann aber nicht noch $b' = 0$ oder $c' = 0$ sein, sonst bekämen wir in der großen Summe mindestens einen zusätzlichen Summanden. Damit folgt für den Gleichheitsfall aber sofort, daß $c = 2b'$, $a = 2c'$, $b = 2c'$ und $a = 2b'$ gilt, also $a = b = c = 2b' = 2c'$.



Noch eine kürzeste Basis im fcc-Gitter

Diese Parameter beschreiben ebenfalls ein fcc-Gitter. Man überzeuge sich an unserer Abbildung, daß die dort eingezeichneten Vektoren eine Gitterbasis bilden, alle gleich lang sind, und einen rechten sowie zwei 60°-Winkel einschließen. □

Eine skandalöse Situation

Und für allgemeine Kugelpackungen? Die Frage nach einer dichtesten Kugelpackung im 3-dimensionalen Raum hat viele Mathematiker in ihren Bann gezogen. Nicht zuletzt fand sie als ein Teil des 18. Problems auch Eingang in die Liste der Hilbertschen Probleme. Obwohl, wie C. A. Rogers 1958 schrieb, “[...] *many mathematicians believe, and all physicists know*”, daß die Vermutung richtig ist, hielt sie sehr lange allen Beweisbemühungen Stand. Der berühmte amerikanische Topologe John Milnor kommentierte 1967 die Kepler-Vermutung mit den Worten: “[...] *the corresponding problem in 3 dimensions remains unsolved. This is a scandalous situation [...]. All that is missing is a proof.*”

Aber auch wenn bis vor kurzem kein Beweis der Kepler-Vermutung vorlag, so hat es doch im Laufe der letzten vier Jahrhunderte zahlreiche wichtige Fortschritte gegeben. Eine erste obere Schranke für die Dichte einer optimalen 3-dimensionalen Kugelpackung findet sich bei H. F. Blichfeldt im Jahre 1919. Seitdem ist die Schranke immer wieder verbessert worden. Wer Statistiken und Tabellen mag, kann das „Rennen“ folgendermaßen zusammenfassen:

0,884	Blichfeldt 1919
0,835	Blichfeldt 1929
0,828	Rankin 1947
0,7797	Rogers 1958
0,77844	Lindsey 1986
0,77836	Muder 1988
0,7731	Muder 1993

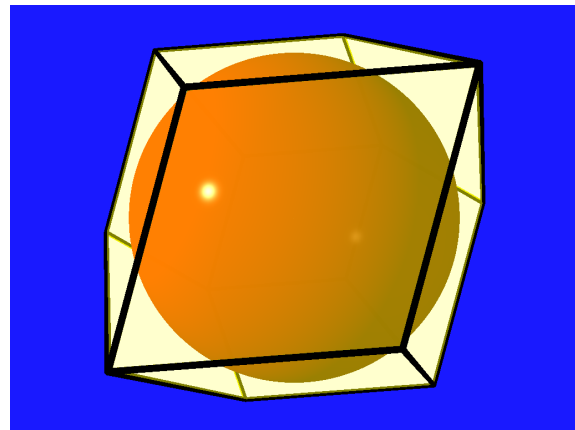
Kommen wir damit der richtigen Antwort nahe? Die Ziellinie liegt ja bei

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0,74048048\dots$$

Und was steckt hinter den Zahlen? Gibt es da eine *Methode*?

Ein Kochrezept?

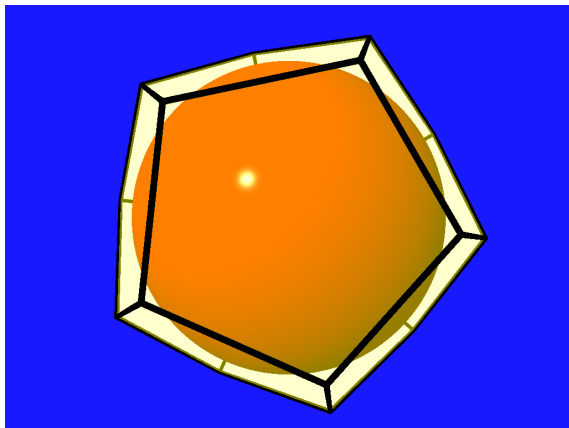
Zunächst sollten wir an dieser Stelle vielleicht festhalten, daß „der offensichtliche“ Ansatz im 3-dimensionalen Fall nicht funktioniert. Das Analogon zum Satz 6 ist da nämlich glatt falsch. Berechnet man nämlich das Volumen der Voronoï-Zellen des Gitters $\Omega = D_3$, so ist dieses gleich 2: weil alle Voronoï-Zellen kongruent sind, und sich das Volumen der Zellen beim Weglassen „jeder zweiten Kugel“ aus dem kubischen Gitter verdoppelt.



Die Voronoï-Zelle des fcc-Gitters: ein Rhombendodekaeder

Das Kepler-Problem wäre nun gelöst, wenn man zeigen könnte, daß in keiner Kugelpackung von Kugeln des Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Voronoï-Zellen von

kleinerem Volumen auftreten können. Aber das ist *falsch*! Es könnte nämlich ein regelmäßiges Dodekaeder als Voronoï-Zelle auftreten, und dessen Volumen ist – um knappe 2% – kleiner.



Ein Dodekaeder als Voronoï-Zelle

Fejes Tóth hat vermutet, daß das Dodekaeder den schlimmsten Fall, also die Voronoï-Zelle minimalen Volumens, ergibt. Diese sogenannte dodekaedrische Vermutung ist eng verbunden mit dem Kugelpackungsproblem und erst kürzlich haben Thomas C. Hales und Sean McLaughlin einen Beweis dafür angekündigt (siehe [4]).

Ein Gegenbeispiel zur Kepler-Vermutung liefern die Dodekaederzellen aber (zunächst) nicht. Mit regelmäßigen Dodekaedern läßt sich der Raum nämlich nicht parkettieren. Und deshalb, so scheint es, können so „unverschämt kleine“ Voronoï-Zellen zwar auftreten, aber nicht ungestraft: die Nachbarzellen müssen dann umso größer sein. Also muß man Mittelwerte bilden; aber wie?

Ein Meilenstein in der Geschichte der Kepler-Vermutung ist László Fejes Tóths Zugang zum Kugelpackungsproblem, 1953 in der ersten Auflage von [3] publiziert. Fejes Tóth schlug vor, bis zu 13 Voronoï-Zellen auszuwählen und ihre lokale Dichte durch ein gewichtetes, durchschnittliches Volumen zu messen. Damit reduzierte er das Problem auf ein Optimierungsproblem in endlich vielen Variablen.

Auch die Versuche zur Lösung des Kepler-Problems der letzten Jahre, von Hsiang und von Hales, von denen gleich die Rede sein wird, basieren auf dem Ansatz von Fejes Tóth. In der

Tat, kürzlich hat Jeffrey C. Lagarias [7] ein allgemeines „Kochrezept“ zur Lösung des Kepler-Problems angegeben, in das sich die Ansätze von Fejes Tóth, Hsiang und Hales einordnen lassen. Dieses werden wir hier nur skizzenhaft wiedergeben; die genauen Bedingungen sind in [7] zu finden.

Satz 8 (Ein Kochrezept nach Lagarias [7])
Die erste Zutat besteht aus einer Zerlegungsregel \mathcal{R} für beliebige gesättigte Kugel-Packungen \mathcal{K} (dies sind Packungen, zu denen man keine weitere Kugel dazupacken kann): Sei $\Omega = \Omega(\mathcal{K})$ die Menge der Kugelmittelpunkte von \mathcal{K} . Dann sei $\mathcal{R}(\Omega)$ eine Zerlegung des \mathbb{R}^3 in konvexe Polytope, so daß jedes Polytop $R \in \mathcal{R}(\Omega)$ nur durch eine begrenzte Anzahl von Kugelmittelpunkten bestimmt ist (man denke etwa an die Zerlegung in Voronoï-Zellen).

Die zweite Zutat (ein scharfes Gewürz) besteht aus einer Gewichtsfunktion, die jedem Polytop $R \in \mathcal{R}(\Omega)$ und jedem Mittelpunkt $\mathbf{v} \in \Omega$ eine reelle Zahl $\sigma(R, \mathbf{v})$ zuordnet, und zwar so, daß es positive Zahlen A, B, C, θ (nur abhängig von \mathcal{R}) gibt mit $\sigma(R, \mathbf{v}) = 0$ falls $\text{dist}(R, \mathbf{v}) > C$, und für jedes Polytop $R \in \mathcal{R}(\Omega)$ gilt

$$\sum_{\mathbf{v} \in \Omega} \sigma(R, \mathbf{v}) = A \cdot \text{vol}(R \cap \mathcal{K}) - B \cdot \text{vol}(R), \quad (*)$$

und für jeden Punkt $\mathbf{v} \in \Omega$ gilt

$$\sum_{R \in \mathcal{R}(\Omega)} \sigma(R, \mathbf{v}) \leq \theta < \frac{4}{3}\pi A. \quad (**)$$

Unter diesen Bedingungen gilt dann die obere Schranke

$$\delta_{\max} \leq \frac{B}{A - \frac{3\theta}{4\pi}}$$

für die Dichte von Kugelpackungen im \mathbb{R}^3 .

Der Beweis dieses Satzes ist ein bißchen technisch (weil man den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ sauber durchführen muß), aber letztlich nicht schwierig. Auch Zerlegungsregeln lassen sich leicht angeben. Die eigentliche Schwierigkeit liegt im Nachweis, daß die Bedingung (**) für

ein gegebenes θ stimmt. Aber für eine gegebene Zerlegungsregel stellt dies ein *endlich-dimensionales* nichtlineares Optimierungsproblem dar. Endlich-dimensional, weil es ja nach der Definition der Gewichtsfunktion eine Konstante N geben muß, so daß $\sigma(R, \mathbf{v})$ von höchstens N „benachbarten“ Polytopen aus $\mathcal{R}(\Omega)$ abhängt.

Wir haben inzwischen schon mehrere Beispiele für Zerlegungsregeln gesehen! In der Tat, für Gitterpackungen mit Gitter Ω liefert die Zerlegung in Translate $\mathbf{w} + P$, $\mathbf{w} \in \Omega$, des Fundamental-Parallelotops P des Gitters eine solche Regel. Nun setzen wir $A := 1$, $B := \frac{\pi}{\sqrt{18}}$ und

$$\sigma(\mathbf{w} + P, \mathbf{v}) := \begin{cases} 0, & \text{für } \mathbf{w} \neq \mathbf{v}, \\ \frac{4}{3}\pi - B \cdot \text{vol}(P), & \text{für } \mathbf{w} = \mathbf{v}. \end{cases}$$

Wie wir aus dem Satz von Gauß wissen, ist $\text{vol}(P)$ für jede Gitter-Kugelpackung nicht kleiner als $4\sqrt{2}$ und somit können wir $\theta = 0$ setzen. Dies ergibt dann natürlich die obere Schranke $\delta_{\max} \leq \frac{\pi}{\sqrt{18}}$.

Und es gibt, wie Lagarias ausführt, derzeit vier mögliche Kandidaten für Zerlegungsregeln und Gewichtsfunktionen, die insgesamt $\delta_{\max} \leq \frac{\pi}{\sqrt{18}}$ auch für allgemeine Kugelpackungen im \mathbb{R}^3 beweisen könnten.

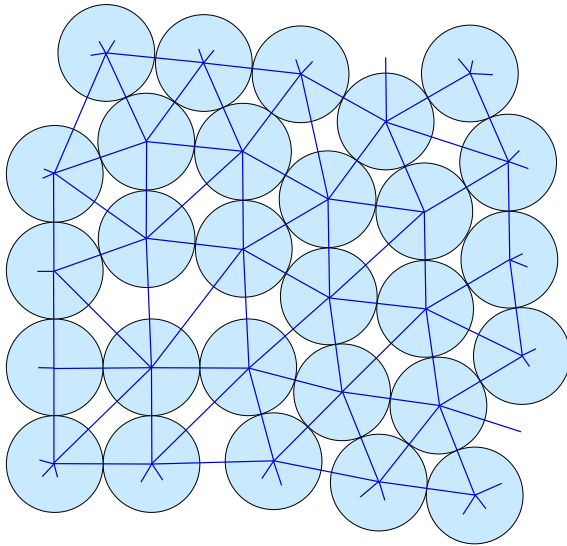
Die **erste** wurde von Fejes Tóth 1953 vorgeschlagen. Sie basiert auf der Voronoï-Zerlegung. Wieder setzt man die Konstanten auf $A := 1$ und $B := \frac{\pi}{\sqrt{18}}$, und definiert nun

$$\sigma(\text{Vor}(\mathbf{w}), \mathbf{v}) := \omega(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{\sqrt{18}} \text{vol}(\text{Vor}(\mathbf{w})) \right),$$

wobei $\omega(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ auf $\frac{1}{12}$ gesetzt wird, wenn \mathbf{v} und \mathbf{w} „nahe beieinander liegen“ (der Abstand von \mathbf{v} und \mathbf{w} zwischen 2 und 2,0534 liegt). Andernfalls ist $\omega(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ für $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$, und die Werte $\omega(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ ergeben sich dann aus der Bedingung (*) des Kochrezeptes. Und dann wäre da noch die Bedingung (**) nachzuprüfen: „*Obwohl eine exakte Berechnung des Minimumproblems recht kompliziert zu sein scheint, kann sie keineswegs als hoffnungslos angesehen werden.*“ (Fejes Tóth [3, S. 181])

Eine **zweite** Zerlegungsregel wurde von dem chinesisch-amerikanischen Mathematiker Wu-Yi Hsiang angegeben. Sie basiert wieder auf der Voronoï-Zerlegung, und kann ganz ähnlich wie die Regel von Fejes Tóth formuliert werden (siehe [7]). Ein wesentlicher Unterschied: Hsiang veröffentlichte 1993 eine Arbeit mit dem Titel „*On the sphere packing problem and the proof of Kepler’s conjecture*“ [5] in der er behauptet(e), (**) bewiesen und damit das Problem gelöst zu haben. Die Arbeit enthält viele Details, Zwischenschritte und Rechenergebnisse. Es ist aber schwer zu sehen, wie in der Arbeit die rechnerische Komplexität des Problems wirklich „in den Griff bekommen“ wird. Diese ist unter anderem deshalb so groß, weil Voronoï-Zellen sehr kompliziert sein können: beispielsweise können sie bis zu 44 Seitenflächen haben, und vielleicht sogar mehr (49 ist eine bewiesene obere Schranke). Die Begeisterung über Hsiangs Arbeit hielt deshalb nicht lange an. Es entbrach eine zum Teil hitzig geführte Diskussion um die Korrektheit des Beweises, die Gabor Fejes Tóth 1996 mit den Worten resümierte: „*This cannot be considered as a proof. The problem is still open.*“ Der Stand der Diskussion im Herbst 1996 ist in [2] nachzulesen.

Die **dritte** und die **vierte** Regel wurden von Thomas C. Hales vorgeschlagen, der jahrelang am Kepler-Problem gearbeitet hat. Beide basieren primär auf sogenannten *Delaunay-Zerlegungen* des \mathbb{R}^3 in Simplexe, in der jeder Simplex die Eigenschaft hat, daß sich im Inneren des Umkreises eines Simplex keine Kugelmittelpunkte befinden dürfen. Diese sind in verschiedener Hinsicht dual zur Voronoï-Zerlegung. Unser Bild illustriert den 2-dimensionalen Fall.



Delaunay-Zerlegung einer Kreisscheibenpackung

Hales arbeitete zunächst mit $A := 4$, $B := 4\delta_{\text{Oct}}$ und einer Gewichtsfunktion vom Typ

$$\sigma(R, \mathbf{v}) := \text{vol}(R \cap \mathcal{K}) - \delta_{\text{Oct}} \text{vol}(R),$$

wobei R ein Delaunay-Tetraeder sein soll, \mathbf{v} eine Ecke davon, und $\delta_{\text{Oct}} \approx 0,7209$ den Flächenanteil eines regulären Oktaeders der Kantenlänge 2 wiedergibt, der von 6 Einheitskugeln an den Ecken überdeckt wird. Es gibt aber Konfigurationen (insbesondere eine besonders eklige: ein reguläres Fünfecksprisma), in denen diese Regel nicht funktioniert. Deshalb wird diese in den Hales-Ansätzen nur für bestimmte Delaunay-Tetraeder verwendet, und für andere wird unter Hinzunahme der Voronoï-Zerlegung weiter unterteilt und bewertet. Die daraus erhaltenen Zerlegungsregeln und Gewichtsfunktionen sind kompliziert und unübersichtlich, aber ...

Computer versus Kepler

Anfang August 1998 kündigte Thomas C. Hales von der University of Michigan an, daß seine mehr als fünf Jahre andauernden Untersuchungen zur Kepler-Vermutung erfolgreich zum Abschluß gekommen sind. Der von ihm vorgelegte, fast 250 Seiten umfassende Beweis ist in fünf Abschnitte untergliedert, wobei der fünfte Abschnitt die Doktorarbeit seines Doktoranden Samuel Ferguson enthält. Die ersten beiden

Teile sind bereits 1997 publiziert worden; die verbleibenden Teile sind über Internet zugänglich [4].

Der Beweis beruht auf der komplizierten und unübersichtlichen vierten Regel für das Kochrezept. Danach hängt die Bedingung (**) für ein gegebenes \mathbf{v} von bis zu 50 weiteren Kugelmittelpunkten \mathbf{w} „in der Nähe“ ab. Das daraus resultierende Optimierungsproblem (in ca. 150 Variablen) ist extrem komplex und mit heutigen Standardmethoden der nichtlinearen Optimierung nicht lösbar. Trotzdem: Hales und Ferguson konnten das Problem wohl computergerecht bearbeiten, unterteilen und aufbereiten. Im vorliegenden Beweis gilt deshalb aber: “[...] *nearly every aspect of the proof relies on computer verifications.*” (T. C. Hales, [4])

Mit Hilfe des Computers werden unter Verwendung von Intervall-Arithmetik ca. 5000 ebene Graphen klassifiziert, die zu den „relevanten Polyedern“ der Zerlegungsregel korrespondieren. Jeder dieser Graphen führt zu einem nichtlinearen Optimierungsproblem, von denen die meisten mit Hilfe von linearen Relaxationen gelöst werden können. Insgesamt werden ungefähr 100 000 lineare Optimierungsprobleme betrachtet, jedes ist in etwa 100 bis 200 Variablen formuliert und besitzt 1000 bis 2000 Restriktionen. Die verbleibenden nichtlinearen Optimierungsprobleme werden mit *Branch and Bound*-Methoden aus der globalen Optimierung behandelt. Die Inputdaten all dieser Optimierungsprobleme sowie die verwendeten Programme sind ebenfalls auf dem WWW einzusehen [4]. Ein Kraftakt: “*The Hales-Ferguson proof, assumed correct, is a tour de force of nonlinear optimization.*” (J. C. Lagarias [7])

Es sei hier auch festgehalten, daß die mehr als fünf Jahre dauernden Untersuchungen von Hales durch eine große Transparenz gekennzeichnet waren. Hales berichtete auf Konferenzen stets freizügig über den aktuellen Stand seiner Forschung und dokumentierte zudem die wesentlichen Fortschritte auf seiner Homepage. Über die Korrektheit seines Beweises ist damit natürlich nichts gesagt, und es wird noch einige Zeit vergehen, bevor die Arbeit abschließend beurteilt werden kann. Aber es besteht wie-

der Hoffnung, daß zukünftig, neben dem Beweis des Fermatschen Satzes, auch die Lösung der Kepler-Vermutung im mathematischen Rückblick auf das 20. Jahrhundert zu nennen sein wird.

“The current status of the Hales-Ferguson proof is that it appears to be sound – no serious errors have been found so far. Some linear programming computations will have to be done over to guarantee their absolute correctness, but no surprises are expected in this. However the proof has not been completely checked and it is so long and complicated that it seems difficult for any one person to check it.” (J. C. Lagarias [7])

Probleme, Probleme

Ein Zoo (ein Bestiarium) von ungelösten Problemen findet sich im Umkreis des Kepler-Problems. Manches Problem läßt sich dabei mit modernen mathematischen Methoden sogar in hohen Dimensionen lösen – andere sind dagegen im Moment nicht mal in der Ebene zu knacken ...

Kreisscheiben näherschieben

Nicht einmal in Dimension 2, in der Ebene, ist man vor ungelösten Problemen sicher. Man betrachte zum Beispiel zwei Anordnungen $\{K_1, \dots, K_n\}$ und $\{L_1, \dots, L_n\}$ von n Einheitskreisscheiben in der Ebene. Diesmal dürfen sie sich überlappen – was die Fläche der Vereinigung zu einer interessanten Größe macht. Nehmen wir an, daß die Kreisscheiben L_i „näher beieinander liegen“, so daß der Abstand der Mittelpunkte von L_i und L_j immer kleiner oder gleich ist dem der Mittelpunkte von K_i und K_j , so daß also

$$\text{vol}(L_i \cup L_j) \leq \text{vol}(K_i \cup K_j)$$

gilt für alle $i < j$. Muß dann automatisch

$$\text{vol}(L_1 \cup \dots \cup L_n) \leq \text{vol}(K_1 \cup \dots \cup K_n)$$

gelten? Das ist immer noch nicht klar [1].

Schlecht packbare Körper

Nicht einmal in der Ebene weiß man, welcher 0-symmetrische konvexe Bereich die schlechteste Packungsdichte hat. „Abgerundete“ regelmäßige Achtecke sind beispielsweise schlechter zu packen als Kreisscheiben – das haben Reinhardt und Mahler vor langer Zeit beobachtet [3, S. 104]. Für beliebige konvexe Körper wird die minimale Packungsdichte von einem Dreieck realisiert.

Gitterpackungen

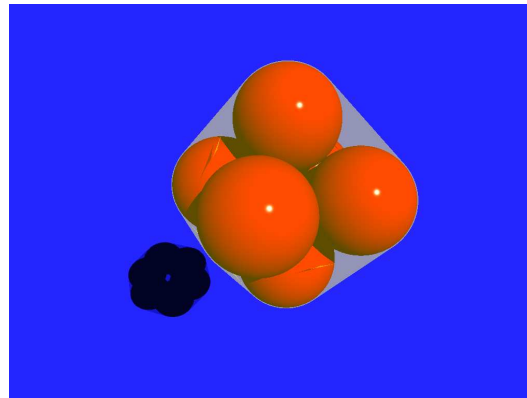
Die besten Gitterpackungen von Kugeln kennen wir für alle Dimensionen $d \leq 8$ (und zwar bereits seit 1929); für $d = 2$ ist es die hexagonale Packung, für $3 \leq d \leq 5$ sind die optimalen Packungen durch das Gitter D_d , der Punkte in \mathbb{Z}^d mit gerader Koordinatensumme gegeben. In Dimensionen $d = 6, 7, 8$ sind die „exceptionellen“ Gitter E_6, E_7 und E_8 besser – und bestmöglich. Aber man interessiert sich auch für noch viel höhere Dimensionen: unter anderem deshalb, weil sich aus guten Gitterpackungen gute „Kodes“ gewinnen lassen, die für die Kodierungstheorie (und damit für effektive und fehlergeschützte Datenübertragung) von Nutzen sein können. Wir verweisen dazu auf den Aufsatz von J. van Lint in diesem Band!

Dabei ist weder bewiesen, noch widerlegt, daß in allen Dimensionen die optimale Packungsdichte durch eine Gitterpackung erreicht wird. Zumindest für Dimension 9 kennt man eine „Nicht-Gitterpackung“, die besser ist als die beste bekannte Gitterpackung. Für sehr exzentrische Ellipsoide, die man für's Packen auch noch drehen darf, ist bereits für $d \geq 3$ gezeigt worden, daß es Packungen gibt, die dichter sind als Gitterpackungen.

Endliche Packungen

In populärwissenschaftlichen Berichten über die Kepler-Vermutung wird gerne darauf verwiesen, daß ein Beweis der Kepler-Vermutung impliziere, daß die pyramidenförmige Anordnung von Orangen, wie in der Abbildung auf

Seite 2 dargestellt, am „platzsparendsten“ ist. Jeder Obsthändler weiß, und die meisten Mathematiker glauben, daß dies richtig ist; bisher gibt es aber keinen Beweis dafür. Es handelt sich nun hierbei um ein *endliches Packungsproblem*! Eine wesentliche Fragestellung in diesem Zusammenhang ist das Problem eine Packung von endlich vielen Kugeln zu finden, so daß das Volumen der *konvexen Hülle* der Kugeln minimal ist – auch deshalb interessant, weil es helfen kann, Kristallformen und Kristallwachstum zu erklären. Eine bemerkenswerte Vermutung von Fejes Tóth, die *Wurstvermutung*, besagt, daß in Dimensionen $d \geq 5$ eine „wurstförmige“ Packung von Kugeln am Besten ist.

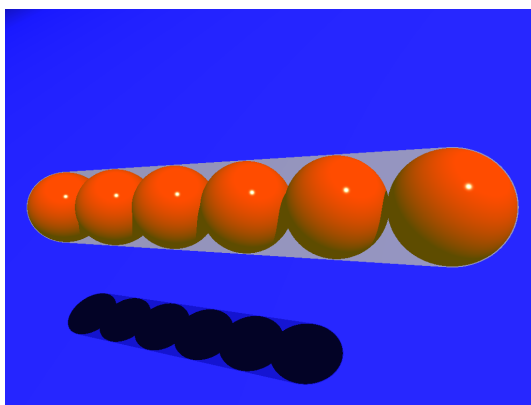


Oktaedrische Packung von 6 Kugeln

Die Wurstvermutung ist inzwischen für Dimensionen ≥ 42 bewiesen worden, aber für die restlichen 37 Dimensionen in das Problem offen. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf das Buch von Max Leppmeier [8]. Übrigens: die oben dargestellte wurstförmige Packung von 6 Kugeln ist besser als die oktaedrische!

Das Kußproblem

In Dimension 2 können höchstens $k_2 = 6$ Kreisscheiben eine gegebene Kreisscheibe gleichzeitig berühren ohne sich zu überlappen. In Dimension 3 sind dies $k_3 = 12$, wie schon Newton vermutete. Man sagt, daß die Kugeln sich küssen – das ist Billiardsprache. Bemerkenswerterweise kann man in den Dimensionen 8 und 24 die Kußzahlen k_d exakt bestimmen: $k_8 = 240$ und $k_{24} = 196560$. Der Beweis kann in [9] nachgelesen werden. Das entsprechende Problem in Dimension 4 ist allerdings immer noch offen: wir wissen nur daß $24 \leq k_4 \leq 25$ gilt. (Hsiang hat allerdings auch schon behauptet, daß er beweisen könne, daß die Kußzahl 24 sei.)



Wurstförmige Packung von 6 Kugeln

Literatur

- [1] M. BERN & A. SAHAI: *Pushing disks together – The continuous motion case*, *Discrete Comput. Geometry* **20** (1998), 499-514.
- [2] K. BEZDEK: *Kepler's conjecture and the dodecahedral conjecture*, *DMV-Mitteilungen* 4-1996, 52-54.
- [3] L. FEJES TÓTH: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer, Berlin, erste Auflage 1953; zweite Auflage 1972.

- [4] T. C. HALES: *The Kepler conjecture*, 1998.
<http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/>
- [5] W.-Y. HSIANG: *On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture*, *International J. Math.* **93** (1993), 739-831.
- [6] J. KEPLER: *Vom Sechseckigen Schnee*, Strena, Frankfurt/Main, 1611 (Faksimile-Verlag Bremen, 1982).
- [7] J. LAGARIAS: *Notes on the Hales approach to the Kepler conjecture*, Preprint 1999.
- [8] M. LEPPMEIER: *Kugelpackungen von Kepler bis heute*, Vieweg, Wiesbaden 1997.
- [9] C. ZONG: *Sphere Packings*, Springer-Verlag, New York 1999.

Dank

Herzlichen Dank an Jeff Lagarias für die Arbeit [7], aus der so viel zu lernen war, und an Bianca Spille für hilfreiche Kommentare.

Martin Henk
FB Mathematik/IMO
Universität Magdeburg
39106 Magdeburg
henk@imo.math.uni-magdeburg.de

Günter M. Ziegler
Fachbereich Mathematik, MA 7-1
Technische Universität Berlin
10623 Berlin
ziegler@math.tu-berlin.de