

Methoden der Kombinatorischen Geometrie

„im Einsatz“*

Günter M. Ziegler

1 Einleitung

Die Methoden, über die ich hier berichte, bauen Brücken von Kombinatorik und Geometrie zu anderen Gebieten. Solche „andere Gebiete“ finden sich vielfältig im Bereich Optimierung und Anwendungen; lineare, ganzzahlige und kombinatorische Optimierung sind eben (auch) kombinatorisch-geometrische Probleme von größter praktischer Bedeutung. Im Bereich der ganzzahligen Optimierung sind dabei wiederum in letzter Zeit Methoden der konstruktiven Algebra (Gröbner-Basen, etc.) nutzbar gemacht worden.

Aber das ist nicht das Thema, das ich mir hier vorgenommen habe. Dieses zielt in die *umgekehrte* Richtung: ich möchte zeigen, wie Methoden der kombinatorischen Geometrie in anderen Gebieten der „reinen Mathematik“ zum Tragen kommen. An drei *Beispielen* möchte ich die Eleganz und Tragfähigkeit von Brücken zu zeigen, die von der diskreten Mathematik in andere Gebiete der Mathematik führen.

Selten werden Brücken für Einbahnstraßen gebaut: auch wenn es manchmal so scheint, daß auf einer Brücke der Verkehr nur in eine Richtung geht, kann dies an tageszeitlichen Schwankungen liegen. Mein erster Themenblock illustriert dies wunderbar: die Verbindung zwischen diskreter Geometrie und algebraischer Geometrie im Bereich der torischen Varietäten. Stanley hat eine Fahrbahn dieser Brücke nutzbar gemacht: mit Hilfe von tief liegenden Aussagen über torische Varietäten (den harten Lefschetz-Satz) hat er kombinatorisch-geometrisches über konvexe Polytope beweisen können (siehe [22]). Inzwischen hat sich die Fahrtrichtung umgekehrt: und mein Beispiel soll illustrieren, wie „einfache“ kombinatorisch-geometrische Überlegungen zu substantiellen Resultaten der algebraischen Geometrie führen können.¹

Was ich unter „kombinatorischer Geometrie“ verstehe, will ich hier gar nicht explizit definieren: jedenfalls sollen Polytope, Gitterpolytope, und ihre Triangulierungen dazu gehören, genauso wie Arrangements von Hyperebenen und von Unterräumen in reellen

*Ausarbeitung meiner „Antrittsvorlesung“ an der TU Berlin, 2. Juli 1998

¹Eine Ironie der Geschichte: Stanley verwendete für seine berühmte Arbeit den „harten Lefschetz-Satz“ für (quasi-glatte, projektive) torische Varietäten. Erst später hat sich herausgestellt, daß damals (1980) gar kein korrekter Beweis dieses Satzes vorlag. Inzwischen liegen mehrere solche Beweise vor: aber der beste und einfachste ist vermutlich der, den McMullen mit konvex-geometrischen Methoden gegeben hat. Auch hier hat sich also der Spieß (die Fahrtrichtung) umgedreht.

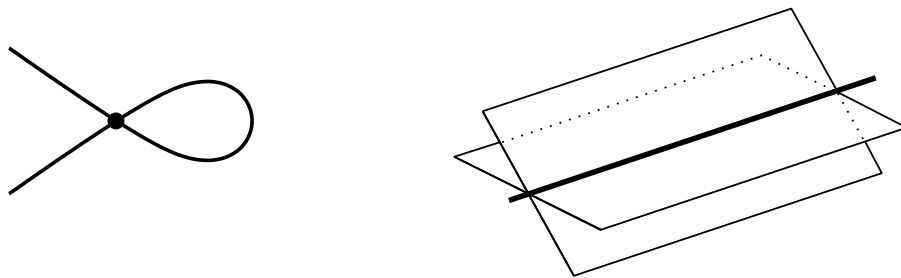
Vektorräumen (die eine starke kombinatorische Struktur haben), und auch Packungen von Kreisen in der Ebene. Diese drei Bereiche charakterisieren auch unser „Spielmaterial“ für das folgende.

1. Algebraische Geometrie: Auflösung von torischen Singularitäten

In diesem Abschnitt will ich zeigen, wie ein einfaches Lemma über Triangulierungen von Polytopen zu einem aktuellen Resultat [6] über die Auflösungen von Singularitäten führt.

Dafür kann man eine existierende, wohletablierte Brücke zwischen algebraischer Geometrie und diskreter Geometrie benutzen: ein Wörterbuch zur Übersetzung zwischen der kombinatorischen Geometrie von Gitterpunkten in Kegeln und der algebraischen Geometrie torischer Varietäten: in beide Richtungen!

Die klassische algebraische Geometrie beschäftigt sich (man verzeihe mir diese und alle folgenden Vereinfachungen) mit *Varietäten*: den Lösungsmengen von Systemen von Polynom-Gleichungen im \mathbb{C}^n bzw. $\mathbb{C}P^n$. Solche Lösungsmengen können z. B. Kurven, Flächen oder Hyperflächen sein, sie können glatt sein oder *Singularitäten* haben (also Teilmengen von Punkten, an denen die Varietät nicht „glatt“ ist).



Zwei singuläre Varietäten.

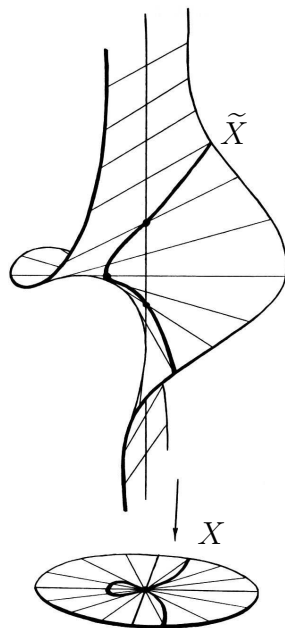
Unsere Zeichnung zeigt (jeweils in einem Bild, das nur den reellen Anteil darstellt) einerseits eine nicht-glatte Kurve in der Ebene, die einen singulären Punkt hat, und die Vereinigung von zwei Ebenen im 3-dimensionalen Raum, für die die gesamte Schnittlinie aus singulären Punkten besteht.

Ein Grundproblem der algebraischen Geometrie besteht in der *Auflösung der Singularitäten*: man versucht zu jeder Varietät X eine neue Varietät \tilde{X} zu konstruieren, zusammen mit einer birationalen Abbildung $f : \tilde{X} \rightarrow X$, die folgende Eigenschaften hat:

1. soll \tilde{X} glatt sein,
2. soll die Abbildung surjektiv sein, und
3. soll sie über den nicht-singulären Punkten von X ein („biregulärer“) Isomorphismus sein.

Wir stellen uns \tilde{X} als eine Art „Überlagerungsfläche“ vor, also als eine Fläche \tilde{X} , die auf

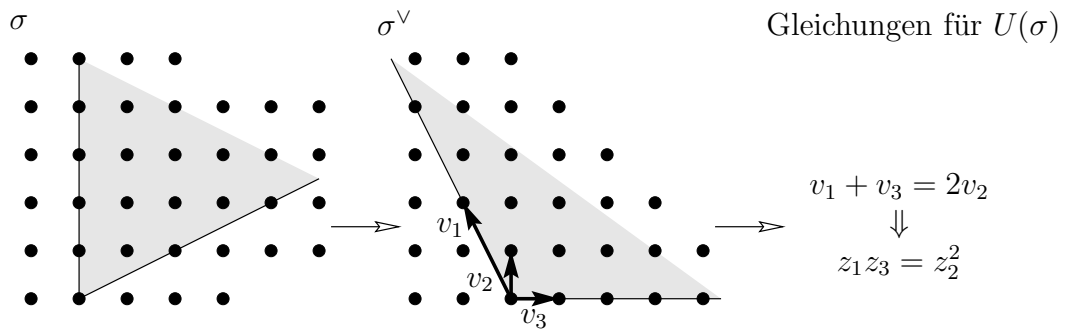
X „herunterprojiziert“ wird, und zwar so, daß sie über den glatten Teilen von X bijektiv ist, über den nicht glatten Teilen aber jeden Punkt durch mehrere oder durch eine ganze Varietät ersetzen darf.



Konstruktion einer glatten Auflösung durch „Aufblasen“ [13]

Ein berühmtes und technisch sehr schwieriges Resultat von Hironaka aus den Sechziger Jahren besagt, daß jede komplexe Varietät eine glatte Auflösung hat. Wir wollen hier aber einen einfacheren Fall diskutieren: torische Varietäten. Für diese ist die Auflösung der Singularitäten kein so großes Problem — man wird stattdessen aber unbescheidener und fragt nach „besonders schönen“ Auflösungen.

Torische Varietäten werden in der algebraischen Geometrie zunächst als Varietäten definiert, auf denen der komplexe Torus (die algebraische Gruppe $(\mathbb{C}^*)^m$) eine Gruppenaktion mit einem dichten Orbit hat. Wir wollen uns hier nicht auf die Diskussion dieser Situation einlassen, sondern betreten die Brücke zwischen algebraischer Geometrie und kombinatorischer Konvexgeometrie, an deren anderem Ende folgende Beschreibung steht: Eine (affine) torische Varietät ist eine Varietät, die sich nach einem konkreten Bauplan aus einem spitzen, rationalen polyedrischen Kegel konstruieren läßt. Die allgemeine Konstruktionsvorschrift werde ich hier gar nicht geben — ich verweise auf die Bücher von Fulton [11] und Ewald [8]. Die Konstruktion soll aber durch ein Beispiel



Konstruktion einer (singulären) torischen Varietät aus einem 2-dimensionalen Kegel.

illustriert werden. Unser Ausgangspunkt ist dabei ein Kegel σ , der spitz (mit dem Nullpunkt als Seitenfläche) und rational ist (durch eine endliche Menge von ganzzahligen Punkten, auf den Extremalstrahlen, erzeugt). Aus σ konstruiert man nun den „dualen Kegel“ σ^\vee : den Kegel aller Vektoren, die mit den Vektoren in σ keine stumpfen Winkel bilden. Dieses σ^\vee ist wiederum rational, und immer voll-dimensional. In σ^\vee betrachtet man nun die *Hilbert-Basis*: die endliche Menge aller ganzzahligen Vektoren $\neq 0$ aus dem Kegel σ^\vee , die sich nicht als Summe zweier anderer solcher Vektoren schreiben lassen. Und dann führt man für jeden Vektor v_i der Hilbert-Basis eine Variable z_i ein, und aus den linearen Abhängigkeiten zwischen den Vektoren ($v_1 + v_3 = 2v_2$ in unserem Beispiel) werden binomiale Gleichungen für eine Varietät ($z_1 z_3 = z_2^2$). Nach diesem Verfahren wird aus dem Kegel $\sigma \subseteq \mathbb{R}^d$ die d -dimensionale torische Varietät $U(\sigma)$ konstruiert (eingebettet im \mathbb{C}^n , wobei n die Anzahl der Vektoren in der Hilbert-Basis von σ^\vee ist).

Der wesentliche Punkt für uns sind nicht die Details dieser Konstruktion, sondern die Existenz eines **Wörterbuches**, das Begriffe der Konvexgeometrie in Konzepte der algebraischen Geometrie übersetzt — und zurück. Der erste Eintrag in diesem Wörterbuch lautet also

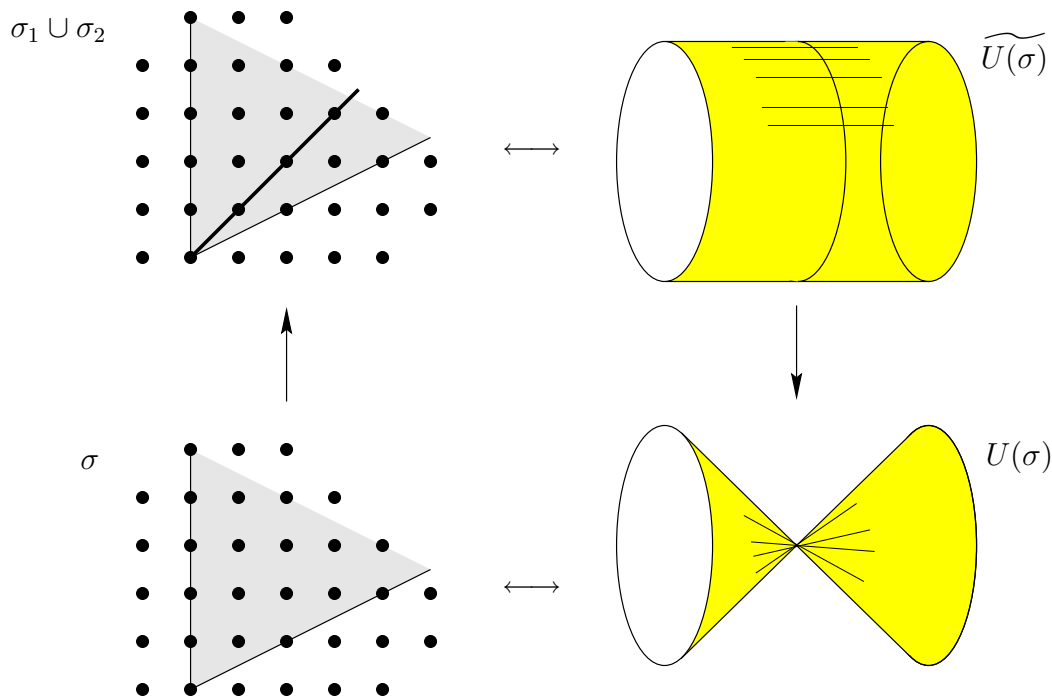
$$\text{polyedrischer Kegel } \sigma \quad \longleftrightarrow \quad \text{affine torische Varietät } U(\sigma).$$

Ein d -dimensionaler Kegel $\sigma \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *unimodular*, wenn er von einer Gitterbasis erzeugt wird; dies ist also ein simplizialer Kegel, auf dessen d Extremalstrahlen es eine Menge von Gittervektoren mit Determinante ± 1 gibt. Diesen Begriff verwenden wir im zweiten Eintrag, ebenso wichtig, der lautet

$$\text{unimodularer Kegel} \quad \longleftrightarrow \quad \text{glatte affine torische Varietät.}$$

Damit kennen wir die Kegel, die glatten Varietäten entsprechen. In unserem kleinen Beispiel ist σ zwar simplizial (jeder Kegel im \mathbb{R}^2 ist simplizial), aber nicht unimodular: σ hat Determinante 2. Dementsprechend sehen wir auf der Seite der algebraischen Geometrie, daß die Varietät $U(\sigma)$ in unserem Beispiel nicht glatt ist: es handelt sich um die durch $z_1 z_3 = z_2^2$ beschriebene Quadrik im \mathbb{C}^3 , die im 0-Punkt eine Singularität hat (was man daran sehen kann, daß alle partiellen Ableitungen von $z_1 z_3 - z_2^2$ im Nullpunkt verschwinden). Aber diese Singularität können wir auflösen: der nächste Eintrag des Wörterbuches lautet nämlich

Unterteilung des Kegels σ
in unimodulare Teilkegel
(„unimodulare Unterteilung“) \longleftrightarrow glatte Auflösung von $U(\sigma)$.

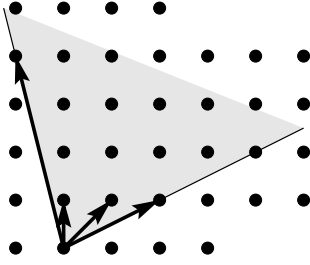


Unterteilung in unimodulare Kegel \longleftrightarrow glatte Auflösung.

Unsere nächste Zeichnung illustriert dies knapp: die Zerlegung von σ in zwei unimodulare Teilkegel ist eine Unterteilung, und ihr entspricht auf der Seite der algebraischen Geometrie die Konstruktion einer glatten Auflösung für die betrachtete Quadrik. Auch diese glatte Auflösung könnte man, mit einem ganz ähnlichen Kochrezept wie oben, ganz explizit aus den kombinatorischen Daten konstruieren — das wollen wir hier aber nicht tun. Stattdessen beschränken wir uns auf die Beschreibung der relevanten Daten auf der Seite der kombinatorischen Geometrie, und geben nur die wesentlichen Einträge im Wörterbuch an. Der nächste Wörterbucheintrag heißt:

unimodulare Unterteilung von σ ,
bei der die Gitterbasen der Teilkegel
alle in einer Hyperebene $H(\sigma)$
enthalten sind \longleftrightarrow nicht-diskrepante Auflösung von
 $U(\sigma)$.

Anstatt den Kegel σ in unimodulare Teilkegel zu zerlegen, kann man auch den Schnitt $P_\sigma := \sigma \cap H(\sigma)$ in unimodulare Simplexe (der Determinante 1) zerlegen. Dies ist natürlich nur dann zu erreichen, wenn von vorneherein die gesamte Hilbert-Basis von σ in einer Hyperebene $H(\sigma)$ enthalten ist. Dies ist durchaus nicht immer der Fall, wie man schon an einfachen 2-dimensionalen Beispielen sehen kann:



Die Bedingung „nicht-diskrepan“ charakterisiert die „besonders schönen“ glatten Auflösungen, die wir konstruieren wollen. Der Begriff ist algebraischen Geometern geläufig: hier ist der Pullback des kanonischen Divisors auf X identisch mit dem kanonischen Divisor auf \tilde{X} (siehe zum Beispiel [18, 19]).

Es gibt noch mehrere interessante Einträge in dem großen Wörterbuch, die für uns hier relevant sein können. Wir erwähnen hier nur einen: die Unterteilung ist *regulär* (oder *kohärent*), also durch eine stückweise konvexe Funktion auf dem \mathbb{R}^n erzeugt, dann und nur dann wenn der Auflösungsmorphismus $f : \tilde{X} \rightarrow X$ projektiv ist. Die Projektivität von f ist nicht von vorneherein klar, weil die Varietät einer Unterteilung nicht aus einem einzelnen Kegel entsteht, sondern aus den glatten Teilstücken $U(\sigma_i)$ der einzelnen Teilkegel „zusammengeklebt“ ist. Und so weiter: eine recht ausführliche Version des Wörterbuchs zwischen kombinatorischer Geometrie und algebraischer Geometrie findet sich im Anhang des Buches von Ewald [8, S. 329-330]. Wir wollen hier die Verwendung des Wörterbuchs an einem „frischen“ Beispiel demonstrieren, indem wir den Beweisweg für den folgenden Satz beschreiben.

Satz [6]. *Jede affine torische Singularität, die sich als vollständiger Durchschnitt darstellen läßt, besitzt eine nicht-diskrepan, projektive, glatte Auflösung.*

Beweisskizze. Wir verwenden einen Satz von Nakajima [17], der die Kegel von denjenigen torischen Varietäten kombinatorisch charakterisiert, die vollständige Durchschnitte sind (die sich also in einen \mathbb{C}^m derart einbetten lassen, daß sie im \mathbb{C}^m Durchschnitte von Kodimension-vielen Hyperflächen sind). Nakajima beschreibt die entsprechenden Kegel ganz explizit:

Nakajimas Klassifikationssatz [17]. *Die affine torische Varietät $U(\sigma)$ ist ein vollständiger Durchschnitt genau dann, wenn σ zu einem Kegel der Form*

$$\{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_i \leq \ell_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \text{ für } 2 \leq i \leq d\}$$

äquivalent ist, wobei die $\ell_i(x_1, \dots, x_i) = m_{i1}x_1 + \dots + m_{i,i-1}x_{i-1}$ lineare Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten sind, die $\ell_i(x_1, \dots, x_i) \geq 0$ erfüllen müssen immer dann, wenn $\ell_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \geq 0$ für alle $j < i$ erfüllt ist.

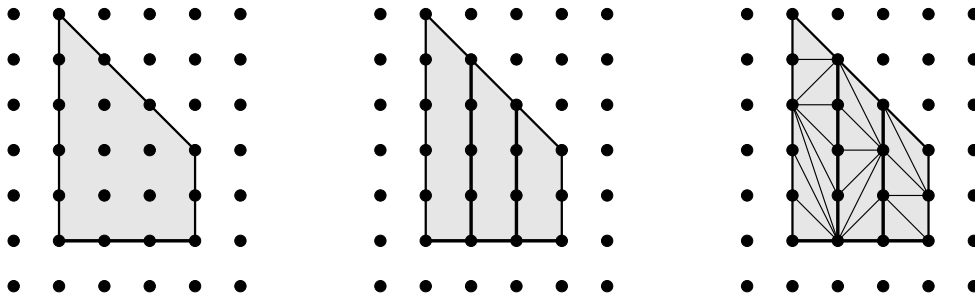
Unter Verwendung des Wörterbucheintrags „nicht-diskrepan“ und durch Übergang vom Kegel σ auf das Gitterpolytop P_σ reduziert sich unser Problem auf das folgende Lemma.

Lemma. *Wenn ein Gitterpolytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ eine unimodulare Triangulierung hat, und $\ell : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare, ganzzahlige Funktion ist mit $\ell(x) \geq 0$ für alle $x \in P$, dann hat*

$$\hat{P} := \{(x, t) : x \in P, 0 \leq t \leq \ell(x)\}$$

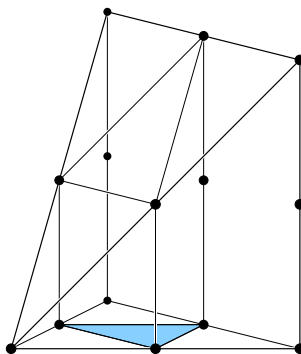
auch eine unimodulare Triangulierung.

Dieses Lemma isoliert den kombinatorisch-geometrischen Kern des Problems, und es ist mit kombinatorisch-geometrischen Methoden überraschend leicht zu beweisen. Die Idee ist in unsere kleine Skizze verpackt: Wenn man eine Triangulierung von P hat, so zerlegt diese \widehat{P} offensichtlich in „Säulen“ über unimodularen Simplex.



Unimodulare Triangulierung eines Nakajima-Polytops.

Nicht nur sind diese Säulen unimodular triangulierbar, sondern noch besser: *jede* Gitter-Triangulierung einer solchen Säule, die von allen zur Verfügung stehenden Gitterpunkten Gebrauch macht, ist unimodular. Wir können also Standard-Methoden anwenden, um die Säulen-Unterteilung in eine unimodulare Triangulierung zu verfeinern. Und dies ist schon das Ende des Beweises. \square



Unter konsequenter Ausnutzung des Wörterbuches haben wir hier ein substantielles Resultat der algebraischen Geometrie auf eine recht einfache Konstruktion der kombinatorischen Geometrie reduziert. Die harte Arbeit lag dabei wohl in der Konstruktion der entsprechenden Wörterbucheinträge, also insbesondere in Nakajimas Charakterisierung der vollständigen Durchschnitte. Auf der Seite der algebraischen Geometrie ist das obige Resultat durchaus nicht trivial. Unter anderem enthält es den Satz, daß der Quotientenraum \mathbb{C}^d/G eine nicht-diskrepante glatte Auflösung hat, wenn G eine endliche abelsche Untergruppe von $SL(\mathbb{C}^d)$ ist und der Quotient als vollständiger Durchschnitt in einen \mathbb{C}^r ($r \geq d$) einbettbar ist — dies wurde in [5] mit viel größerem Aufwand (aber auch unter Verwendung des Wörterbuchs!) nachgewiesen.

2. Algebraische Topologie:

Die Kohomologiealgebren der Konfigurationsräume von Sphären

In diesem Abschnitt berichte ich über die Berechnung der ganzzahligen Kohomologiealgebren der Konfigurationsräume von Sphären. Diese Kohomologiealgebren kann man als subtile Invarianten der (höher-dimensionalen) Sphären interpretieren.

(Für unsere Darstellung ist die genaue Bedeutung der Kohomologie-Algebra gar nicht so wichtig: es sei nur gesagt, daß allgemein die Kohomologie-Algebra eines topologischen Raumes ein Ring ist, der wesentliche topologische Daten in ein algebraisches Objekt kodiert.)

Die vollständige Konstruktion dieser Algebren [9] basiert auf der Erkenntnis, daß der größte Teil der Information in einem linearen Arrangement von Unterräumen „versteckt“ ist. Nun hat die kombinatorische Theorie der Unterraumarrangements in den letzten 15 Jahren bemerkenswerte Fortschritte gemacht und stellt vielfältige Hilfsmittel zur Verfügung, um Kohomologie-Invarianten zu berechnen. Im vorliegenden Fall liefert die entwickelte Theorie „alles was man braucht“.

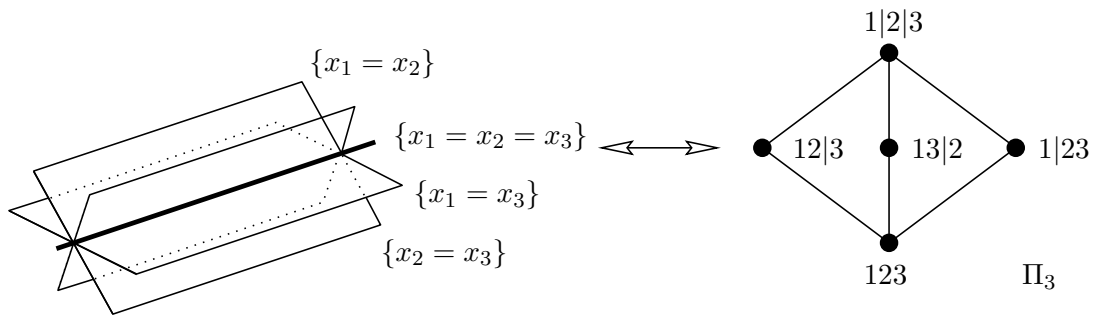
Also kommt es in diesem Bereich der algebraischen Topologie „nur“ darauf an, die kombinatorisch-geometrischen Strukturen zu erkennen, zu isolieren, und die entsprechende Theorie nutzbar zu machen.

Konfigurationsräume sind Objekte von zentralem Interesse für die algebraische Topologie, aber auch für Fragen der algebraischen Geometrie und der mathematischen Physik. Sei dafür X ein topologischer Raum (beispielsweise der \mathbb{R}^k oder eine Sphäre S^k). Wir definieren den *geordneten Konfigurationsraum* von X als

$$\begin{aligned} F(X; n) &:= \{\text{alle geordneten } n\text{-Tupel von verschiedenen Punkten in } X\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j \text{ für alle } i \neq j\}. \end{aligned}$$

Dieser Konfigurationsraum enthält wichtige geometrisch-topologische (und „physikalische“) Information über X : er beschreibt, wie sich Konfigurationen von n Punkten („Teilchen“) in X bewegen können.

Beispiel. $F(\mathbb{R}; 3)$ ist der Raum aller Tripel von Punkten auf der reellen Geraden. Wir können diesen Raum als eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 auffassen, und zwar sind das alle Punkte des \mathbb{R}^3 , die nicht auf einer der drei Ebenen liegen, die durch $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ und $x_2 = x_3$ gegeben sind. Diese drei Ebenen schneiden sich in der Geraden, die durch $x_1 = x_2 = x_3$ definiert wird.



Das Komplement von drei Ebenen bildet den Konfigurationsraum $F(\mathbb{R}; 3)$.

Wir sehen also, daß der Konfigurationsraum $F(\mathbb{R}; 3)$ aus sechs Komponenten besteht, die einerseits den Regionen des Ebenenarrangements in \mathbb{R}^3 entsprechen, andererseits aber den Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Die Struktur des Konfigurationsraums ist hier also sehr einfach, die Struktur des Arrangements schon komplizierter: sie läßt sich durch die Partitionen der Menge $\{1, 2, 3\}$ beschreiben. Auf welchen Ebenen des Arrangements ein Punkt $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ liegt, hängt nämlich davon ab, welche der Koordinaten gleich sind: die Gleichheit von Koordinaten definiert eine Partition von $\{1, 2, 3\}$, in der die verschiedenen Blöcke den verschiedenen Koordinaten entsprechen.

Beispiel. Der Konfigurationsraum $F(\mathbb{R}; n)$ ist wiederum das Komplement eines Hyper-ebenenarrangements. Wir haben nämlich

$$F(\mathbb{R}; n) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i < j} \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j\}.$$

Das Komplement dieses Arrangements von $\binom{n}{2}$ Hyperebenen besteht aus $n!$ zusammen-ziehbaren Komponenten. Das Schnittmuster der vielen verschiedenen Hyperebenen ist durch die Partitionen der Mengen $\{1, 2, \dots, n\}$ gegeben. Ordnet man diese Partitionen nach „Verfeinerung“, so erhält man den Verband Π_n , den Partitionenverband der Kombinatorik [1]. Dieser beschreibt uns also das (halbwegs komplizierte) Schnittverhalten der Hyperebenen, während der Konfigurationsraum selbst ein sehr einfacher Raum ist.

Beispiel. Wir gehen einen Schritt weiter: der Konfigurationsraum $F(\mathbb{R}^k; n)$ ist eine Teilmenge des $(\mathbb{R}^k)^n$. Wir können ihn deshalb als einen Raum von Matrizen auffassen, nämlich als

$$F(\mathbb{R}^k; n) = \{X \in \mathbb{R}^{k \times n} : X \text{ hat keine gleichen Spalten}\}.$$

Dieser Konfigurationsraum ist kompliziert. Wir haben es hier nämlich mit einem Arrangement von Unterräumen der Kodimension k in \mathbb{R}^{kn} zu tun, und diese Unterräume zerschneiden den \mathbb{R}^{kn} nicht, sondern sie entfernen aus ihm eine relativ komplizierte Teilmenge. Die kombinatorische Struktur des Arrangements ist aber vom Übergang von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^k nicht komplizierter geworden: das Schnittmuster des Arrangements ist weiterhin durch den Partitionenverband Π_n gegeben.

An dieser Stelle greifen wir jetzt auf eine weit-entwickelte kombinatorisch-geometrische Theorie zurück, die es uns erlaubt, aus den kombinatorischen Daten (Schnittverband und Kodimensionsfunktion) eines Unterraum-Arrangements wesentliche algebraisch-topologische Invarianten des Komplement zu konstruieren. Für die hier betrachteten Beispiele steht nach Arbeiten von verschiedenen Autoren (aktuelle Referenzen sind [2] und

[10]) eine vollständige und explizite Beschreibung der Kohomologie-Algebra des Komplements, $H^*(F(\mathbb{R}^k; n))$, zur Verfügung. Wir können Erzeugende und Relationen angeben, wir können eine Basis angeben, und die Erzeugenden können geometrisch gedeutet werden. Die Theorie der Unterraum-Arrangements liefert also eine *vollständige* Beschreibung der Kohomologie-Algebren der Konfigurationsräume $F(\mathbb{R}^k; n)$.

Unser Ziel in diesem Abschnitt sind aber die Konfigurationsräume der Sphären: also der Räume $F(S^k; n)$. Jeder solche Raum ist eine Teilmenge des entsprechenden Produktraums $(S^k)^n$, und dieser Gesichtspunkt liefert Ansätze zur Berechnung der Kohomologie, aber man kommt damit nicht sehr weit. Ein anderer Gesichtspunkt bietet sich an. Wir betrachten die Abbildung

$$F(S^k; n) \longrightarrow S^k,$$

die dadurch gegeben ist, daß wir jedes n -Tupel von Punkten auf den jeweils letzten Punkt abbilden. Diese Abbildung ist offenbar surjektiv, und man überlegt sich leicht, daß die Urbilder der Punkte in S^k alle „gleich aussehen“, d. h. homöomorph sind: sie sind nämlich von der Form $F(S^k \setminus \{1 \text{ Punkt}\}; n - 1)$. Und wenn man jetzt $S^k \setminus \{1 \text{ Punkt}\}$ durch den homöomorphen Raum \mathbb{R}^k ersetzt, so erhält man den wohlbekannteren Konfigurationsraum $F(\mathbb{R}^k; n - 1)$. Damit haben wir $F(S^k; n)$ als den Totalraum eines *Faserbündels* interpretiert. Wir schreiben für die erhaltene Struktur

$$F(\mathbb{R}^k; n - 1) \hookrightarrow F(S^k; n) \longrightarrow S^k.$$

Hier ist S^k die *Basis* des Faserbündels, der Konfigurationsraum $F(\mathbb{R}^k; n - 1)$ ist die *Faser*, und unser Zielobjekt $F(S^k; n)$ ist der *Totalraum*. Die Struktur sei wieder an einem sehr kleinen Beispiel illustriert: unsere Zeichnung skizziert den Fall $k = 1, n = 3$.

$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right\}$

Das Faserbündel $F(\mathbb{R}^1; 2) \hookrightarrow F(S^1; 3) \longrightarrow S^1.$

Jetzt haben wir eine Situation hergestellt, in der algebraische Topologen mit großem Vergnügen einer ihrer Lieblings-„Waffen“ zücken: die sogenannte Leray-Serre Spektralsequenz [3]. Diese ist ein algebraisches Hilfsmittel, das es in schönen Fällen erlaubt, Information über die Kohomologie des Totalraums eines Faserbündels aus Informationen über Basis und Faser zusammensetzen. Hier befinden wir uns in einem besonders schönen Fall: man kann nämlich aus der Spektralsequenz vollständige Information „herausziehen“, eine vollständige Beschreibung des Kohomologierings mit Erzeugern und Relationen, usw.

Satz [9]. *Für ungerades k hat $F(S^k; n)$ den selben Kohomologiering wie das Produkt $F(\mathbb{R}^k; n - 1) \times S^k$ — aber für gerades $k \geq 2$ sieht dieser Kohomologiering „ganz anders“ aus als der Kohomologiering des Produkts: er hat dann nämlich viel kleineren Rang, und 2-Torsion.*

Ganz indirekt wollen wir eine vollständige Beschreibung dieses Kohomologierings angeben. Dafür starten wir einen „zweiten Versuch“: wir schreiben den Konfigurationsraum $F(S^k; n)$ als Totalraum eines anderen Faserbündels: für $n \geq 3$ können wir nämlich

$F(S^k; n)$ auch auf die drei letzten Punkte der Konfiguration abbilden. Dies erzeugt eine neue, andere Faserbündelstruktur:

$$F(\mathbb{R}^k \setminus \{2 \text{ Punkte}\}; n - 3) \hookrightarrow F(S^k; n) \longrightarrow F(S^k; 3).$$

Die Struktur dieses Faserbündels ist eigentlich viel schöner als vorher. Für $k = 2$ ist $F(S^2; 3)$ beispielsweise eine Gruppe, die die Experten als $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ identifizieren. Die Gruppenaktion zerlegt das Faserbündel in ein Produkt:

$$F(S^2; n) \cong F(S^2; 3) \times F(\mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ Punkte}\}; n - 3).$$

Im allgemeinen (für $k > 2$) gibt es keine so schöne Produktstruktur. Aber wir können wiederum die Leray-Serre Spektralsequenz loslaufen lassen, und die Spektralsequenz läßt sich auch diesmal bis zum Ende durchrechnen. Das Ergebnis ist der folgende Satz.

Satz [9]. *Für alle k ist der Kohomologiering von $F(S^k; n)$ isomorph zu dem von*

$$F(S^k; 3) \times F(\mathbb{R}^k \setminus \{2 \text{ Punkte}\}; n - 3).$$

Diese Beschreibung des Kohomologierings von $F(S^k; n)$ ist deswegen brauchbar und in gewisser Hinsicht vollständig, weil man die Komponenten der Beschreibung sehr gut kennt. Der Konfigurationsraum $F(S^k; 3)$ ist homotopie-äquivalent zu der Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_{k+1,2}$, also einem sehr klassischen Objekt. Andererseits ist $F(\mathbb{R}^k \setminus \{2 \text{ Punkte}\}; n - 3)$ das Komplement eines affinen Unterraum-Arrangements, und auch hierfür greift wieder die kombinatorisch-geometrische Theorie der Unterraum-Arrangements, und liefert uns eine vollständige Beschreibung des Kohomologierings „vor die Haustür“. Und schließlich ist aus klassischer Theorie bekannt, wie sich der Kohomologiering eines Produktraums aus den Komponenten zusammensetzt — damit ist das Problem endgültig gelöst.

Damit ist unsere Diskussion der Kohomologieringe von Konfigurationsräumen beendet. Man würde gerne auch die Kohomologieringe von viel komplizierteren Konfigurationsräumen berechnen, aber ganz so explizite Antworten wie im dargestellten Fall sind da nicht immer zu erwarten, schon gar nicht mit unseren relativ einfachen Methoden. Aber auch dann können wir versuchen, die kombinatorische Struktur zu beschreiben und auszunutzen, die sich „am Rande“ der Konfigurationsräume findet, wenn wir sie in größere Strukturen einbetten — beispielsweise die Einbettung von $F(X; n)$ in den Produktraum X^n . Eine recht neue Arbeit von Fulton & MacPherson [12] liefert bemerkenswerte Ansätze in diese Richtung.

3. Funktionentheorie:

Konstruktion konformer Abbildungen aus Kreispackungen

Der Riemannsche Abbildungssatz ist ein altes und klassisches Resultat der Funktionentheorie. Aber erst kürzlich wurde beobachtet und bewiesen, daß die vom Abbildungssatz „versprochenen“ Abbildungen eng mit Packungen von Kreisscheiben in der Ebene, also mit diskret-geometrischen Objekten, zu tun haben.

Dieser Zusammenhang liefert inzwischen ein wunderschönes „diskretes Modell“ für konforme Abbildungen — und führt dabei auch zu Verfahren zur expliziten (numerischen) Konstruktion konformer Abbildungen.

Das Anwendungsbeispiel aus der Funktionentheorie soll insbesondere den Reichtum an kombinatorisch-geometrischen Strukturen illustrieren, die man bei der (richtigen!) Diskretisierung von analytischen Problemen entdecken kann.

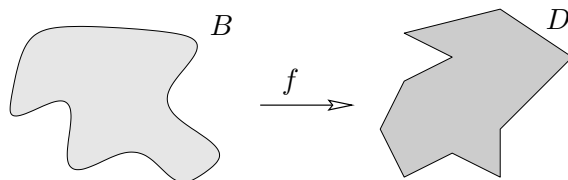
Die Konstruktion konformer Abbildungen ist eigentlich ein analytisches Problem, das sich praktisch/numerisch auf die Lösung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen reduzieren läßt. Aber wir wollen hier sehen, daß die „richtige“ Diskretisierung zu wunderschönen kombinatorisch-geometrischen Strukturen führt.

Die wesentlichen Begriffe liefert uns das folgende Lemma. Wir identifizieren von jetzt an die reelle Ebene \mathbb{R}^2 mit der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} und betrachten einen offenen Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$.

Lemma. Wenn $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ eine injektive und stetig-differenzierbare Abbildung ist, dann sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent.

- (1) f ist orientierungs- und winkel-erhaltend,
- (2) f ist komplex differenzierbar,
- (3) f ist komplex-analytisch.

Eine Abbildung f , die diese Bedingungen erfüllt, heißt *konform*.



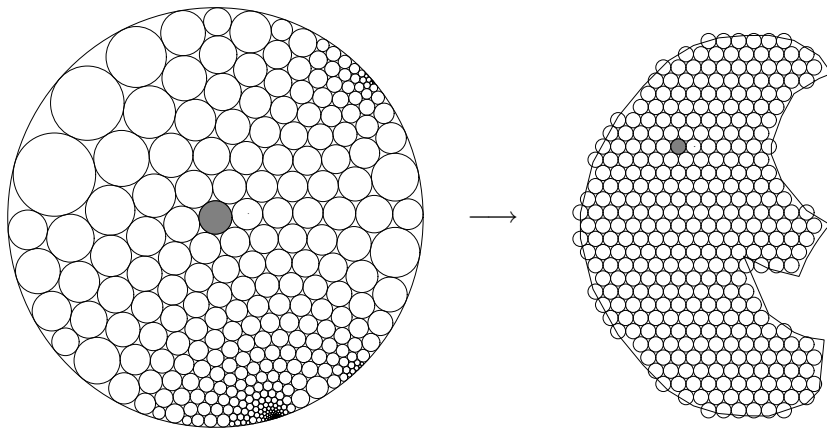
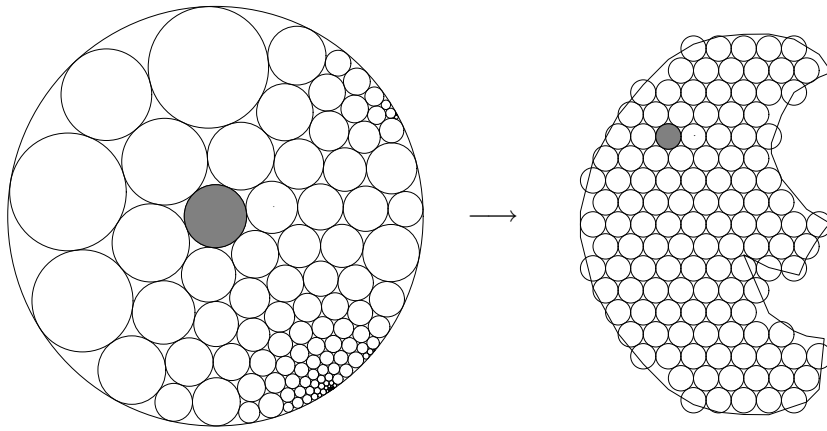
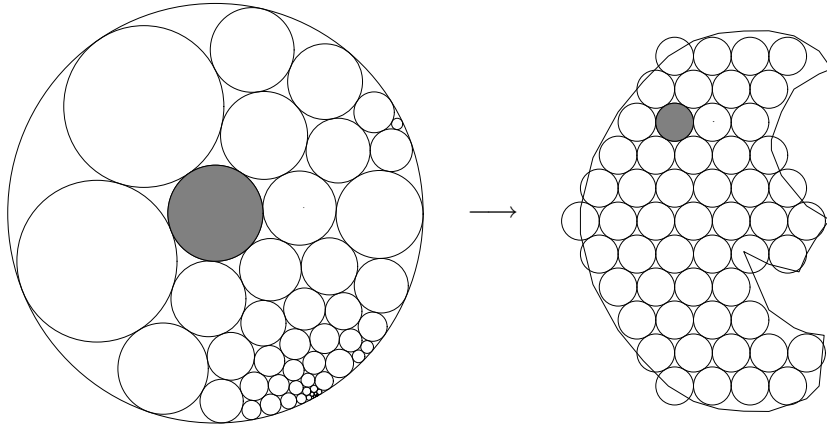
Bei diesem Lemma handelt es sich um einfache Grundtatsachen aus der Funktionentheorie. Die wesentliche (und durchaus nicht triviale) Tatsache über die Existenz konformer Abbildungen ist der Inhalt des Riemannsches Abbildungssatzes:

Riemannsches Abbildungssatz. Für jedes einfach-zusammenhängende beschränkte Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ mit $0 \in D$ gibt es genau eine konforme Abbildung

$$f : B^2 \rightarrow D,$$

die die offene Kreisscheibe B^2 auf das vorgegebene Zielgebiet D abbildet, und die zusätzlich $f(0) = 0$ und $f'(0) \in \mathbb{R}^+$ erfüllt.

Für ein solch klassisches Resultat gibt es natürlich klassische Beweise, aber der folgende Zugang ist recht neu: der Ansatz wurde von Thurston 1985 vorgeschlagen, Rodin & Sullivan [20] haben bewiesen, daß er funktioniert, und Schramm [21] hat die Analyse perfektioniert. Wir geben den „Beweis in Bildern“ (auf der folgenden Seite) — die unter Verwendung der CirclePack-Programme von Stephenson [7, 23] erzeugt wurden.



Kurz gesagt passiert in diesen Bildern das folgende. Wir überdecken unser Zielgebiet mit kleinen Kreisscheiben, die alle gleich groß sind und hexagonal gepackt werden. Dabei soll eine kleine Kreisscheibe den Mittelpunkt im 0-Punkt haben, und eine weitere soll genau rechts daneben liegen. (Aus technischen Gründen werden wir eventuell am Rand einige Kreisscheiben weglassen, die nicht gut genug mit dem Rest verbunden sind, aber dieses Detail soll uns hier nicht stören.) Und dann wendet man das folgende bemerkenswerte „Kreispackungslemma“ an.

Lemma. *Zur gegebenen Kreispackung in D gibt es eine kombinatorisch äquivalente Packung der Kreisscheibe B^2 .*

Fordert man weiterhin, daß eine Kreisscheibe um den Nullpunkt in B^2 , und eine Kreisscheibe „rechts daneben“ (also mit Mittelpunkt auf der positiven x -Achse) auf eine Kreisscheibe um den Nullpunkt in D bzw. auf eine Kreisscheibe „rechts daneben“ abgebildet werden, dann ist die Kreispackung in B^2 sogar eindeutig.

Dieses Lemma liefert uns also die einzelnen Kreispackungen von B^2 , die dann für feinere Packungen über D gegen die gesuchte konforme Abbildung konvergieren.

Unser letztes Problem hat zwei Teile: Erstens, warum stimmt das Lemma und wie beweist man es, und zweitens, wie konstruiert man die entsprechende Kreispackung. Zunächst ist festzustellen, daß hier keine Analysis mehr im Spiel ist: es handelt sich um ein reines Problem der Graphentheorie bzw. des „Graphen-Layout“. Dann ist auch bemerkenswert, daß jeder der (mehreren, verschiedenen) Beweise des Kreispackungslemmas uns auch eine Konstruktionsvorschrift bzw. zumindest ein Näherungsverfahren zur Konstruktion einer geeigneten Kreispackung an die Hand gibt. Die gesuchte Kreispackung kann als Lösung eines konvexen Optimierungsproblems charakterisiert werden (nach Colin de Verdière [4]). Es gibt iterative Lösungsverfahren (z.B. Rote & Pulleyblank), die sukzessive die „korrekten“ Radien der Kreispackung von B^2 approximieren, und es gibt sogar (nach Mohar [16]) ein Verfahren, das im theoretischen Sinne „schnell“ die gesuchte Kreispackung liefert. Die Graphentheorie bietet hier also eine große Vielfalt von Ideen, Methoden und Ansätzen, und (fast) alle führen zum Ziel. Die vielleicht schönste Version des Kreispackungslemmas (nach Schramm [21]) interpretiert es als einen Darstellungssatz für 3-dimensionale Polytope. Es gilt nämlich:

Theorem. *Jeder ebene, 3-fach zusammenhängende Graph G hat eine Darstellung als Graph eines 3-dimensionalen Polytops.*

Jedes solche Polytop kann mit allen Kanten tangential zur Einheitssphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ dargestellt werden.

Und weiterhin ist diese Darstellung eindeutig bis auf Rotation und Reflektion, wenn man zusätzlich annimmt, daß der Schwerpunkt der Berührungspunkte des Polytops der Mittelpunkt der Sphäre sein soll.

Dieses Theorem hat eine lange Geschichte: sein erster Teil ist der „Satz von Steinitz“ von 1911, eine ausgesprochen nicht-triviale Aussage, die in der 4-dimensionalen Geometrie kein Gegenstück hat. Nach der zweiten Aussage wurde in den Siebziger Jahren erstmals gefragt. Die Eindeutigkeitsaussage letztlich wurde von Oded Schramm erzielt.

Einfach zu beweisen, aber hübsch, ist die Äquivalenz zwischen dem Darstellungssatz für Polytope und dem Kreispackungslemma in der Ebene. (Um eine Richtung zu sehen, be-

trachte man für ein gegebenes Polytop alle diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche, die von einer Ecke des Polytops aus gesehen werden können.)

Und die letzte Bemerkung ist die folgende: solange die Mathematik in einzelne Fachgebiete eingeteilt bleibt, und die Brücken zwischen den Gebieten nicht funktionieren, kann es durchaus passieren, daß Resultate auf der einen Seite schon lange bekannt sind, auf der anderen Seite aber als offene Probleme gelten. Ein Beispiel bietet dafür wiederum das Kreispackungslemma: davon hat Koebe (Funktionentheorie) in den Dreissiger Jahren [15] zumindest einen wichtigen Spezialfall schon bewiesen, Andreev (hyperbolische Geometrie) in den Sechziger Jahren, das gesamte Resultat wurde von Thurston (3-Mannigfaltigkeiten) in den Achziger Jahren hergeleitet und von Schramm poliert. Und trotzdem: in dem Buch [14] des berühmten Graphentheoretikers Ringel von 1990 ist das Kreispackungslemma als offenes Problem (über “coin graphs”) gestellt, das Resultat war also in der Graphentheorie noch nicht bekannt. Und dort wird ganz richtig beobachtet:

“If the conjecture is true, then it is probably very hard to prove. If the conjecture is false, a single counterexample will disprove it, but probably a complicated one.”

Wenn die Brücken zwischen den Teilen der Mathematik funktionieren, dann können wir auch solche Anachronismen vermeiden.

Danksagung. Meinen Koautoren Dimitrios Dais, Eva-Maria Fechtner und Christian Haase bin ich für die produktive gemeinsame Arbeit zu Dank verpflichtet, für die Ermutigung zum Bericht darüber, und für viele hilfreiche Kommentare zum vorliegenden Manuskript. Carsten Jackisch danke ich für die Kreispackungsbilder.

Literatur

- [1] M. Aigner: Kombinatorik, I. Grundlagen und Zähltheorie, Springer Hochschultext, 1975.
- [2] A. Björner & G. M. Ziegler: Combinatorial stratification of complex arrangements, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), 105-149.
- [3] A. Borel: Topics in the Homology Theory of Fibre Bundles, *Lecture Notes in Math.* **36**, Springer-Verlag 1967.
- [4] Y. Colin de Verdière: Un principe variationnel pour les empilements de cercles, *Inventiones Math.* **104** (1991), 655–669.
- [5] D. I. Dais, M. Henk & G. M. Ziegler: All abelian quotient c.i.-singularities admit projective crepant resolutions in all dimensions, *Advances in Math.* **139** (1998), 194-239.
- [6] D. I. Dais, C. Haase & G. M. Ziegler: All toric l.c.i.-singularities admit projective crepant resolutions, Preprint 1998/99.
- [7] T. Dubejko & K. Stephenson: Circle packing: experiments in discrete analytic function theory, *Experimental Math.* **4** (1995), 307-347.
- [8] G. Ewald: Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry, *Graduate Texts in Math.* **168**, Springer-Verlag New York 1996.

- [9] E. M. Feichtner & G. M. Ziegler: The integral cohomology algebras of ordered configuration spaces of spheres, Preprint, October 1997, 21 pages.
- [10] E. M. Feichtner & G. M. Ziegler: On cohomology algebras of complex subspace arrangements, Preprint, August 1998, 33 pages; *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [11] W. Fulton: Introduction to Toric Varieties, Annals in Math. Studies, Vol. 131, Princeton University Press 1993.
- [12] W. Fulton & R. D. MacPherson: A compactification of configuration spaces, *Annals Math.* **139** (1994), 183-225.
- [13] R. Hartshorne: Algebraic Geometry, *Graduate Texts in Math.* **52**, Springer, 1977.
- [14] N. Hartsfield & G. Ringel: Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction, Academic Press, San Diego 1990.
- [15] P. Koebe: Kontaktprobleme der konformen Abbildung, *Ber. Verh. Sächs. Akademie der Wissenschaften Leipzig, Math.-Phys. Klasse* **88** (1936), 141-164.
- [16] B. Mohar: A polynomial time circle packing algorithm, *Discrete Math.* **117** (1993), 257-263.
- [17] H. Nakajima: Affine torus embeddings which are complete intersections, *Tôhoku Math. J.* **38** (1986), 85-98.
- [18] M. Reid: Canonical threefolds, in: "Journée de Géométrie Algébrique d' Angers" (A. Beauville, ed.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1980, 273-310.
- [19] M. Reid: Young person's guide to canonical singularities, in: "Algebraic Geometry", Proc. Summer Res. Inst. Brunswick/Maine 1985, Part 1, *Proc. Symp. Pure Math.* **46** (1987), 345-414.
- [20] B. Rodin & D. Sullivan: The convergence of circle packings to the Riemann mapping, *J. Differential Geometry* **26** (1987), 349-360.
- [21] O. Schramm: How to cage an egg, *Invent. Math.* **107** (1992), 543-560.
- [22] R. P. Stanley: The number of faces of simplicial polytopes and spheres, in: "Discrete Geometry and Convexity", New York 1982 (J. E. Goodman et al., eds.), *Annals New York Academy of Sciences* **440**, New York 1985, 212-223.
- [23] K. Stephenson: CirclePack, <http://www.math.utk.edu/~kens/>