

3. ÜBUNG ZUR VORLESUNG "ULTRAFILTER, HALBGRUPPEN, KOMBINATORIK"

Sabine Koppelberg

Ausgabe: 18. 11. 2010 (auf der Internet-Seite der Vorlesung)

Die Lösungen werden in der Übung am 25. 11. 2010 besprochen.

Aufgabe 10. Aufgabe 4.4 des Skripts.

Aufgabe 11. (S, \cdot) sei eine Halbgruppe, $p, q, r \in \beta S$ und $A \subseteq S$. Zeigen Sie (analog zu 4.7(d) im Skript): $A \in pqr$ genau dann, wenn es Mengen $V \in p$, $W_v \in q$ (für $v \in V$) und $X_{vw} \in r$ (für $v \in V$ und $w \in W_v$) gibt mit

$$\{vwx : v \in V, w \in W_v, x \in X_{vw}\} \subseteq A.$$

Aufgabe 12. Aufgabe 4.1 des Skripts.

Aufgabe 13. Wir betrachten die Halbgruppe (\mathbb{N}, \cdot) . Zeigen Sie, dass es (freie) Ultrafilter p, q auf \mathbb{N} und eine Teilmenge C von \mathbb{N} gibt mit:

- (a) $C \in pq$
- (b) für kein $A \in p$ und $B \in q$ gilt $A \cdot B \subseteq C$.

Diese Aufgaben sollen mit der Aussage von Satz 4.7 (Beschreibung der Mengen $A \subseteq S$, die in $p \cdot q$ liegen) vertraut machen.

Aufgabe 10 ist dann einfach, Aufgabe 11 hauptsächlich Schreibaarbeit.

Aufgabe 12: viel Nachrechnen, aber keine weiteren Ideen. Hier sieht man, wie sich die Multiplikation auf βS ohne topologische Hilfsmittel definieren läßt.

Aufgabe 13 erfordert eine eigene Idee, ist dann aber technisch kein Problem.