12. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 2. 2. 2012, Besprechung am 9. 2. 2012

Die **Klausur** findet am Montag, den 13. 2., von 12.15 bis 13.45 im Seminarrraum unserer Vorlesung statt. Erlaubtes Hilfsmittel ist nur ein von Ihnen beschriebenes (bedrucktes) Blatt Papier (kein Buch, keine Vorlesungsmitschrift, ...)!
Wer die Klausur nicht bestanden hat, macht bei mir eine mündliche Nachprüfung im Lauf der Semesterferien.

Dies ist das letzte offizielle Übungsblatt dieses Semesters. Es befasst sich mit Partitionsaussagen und benutzt in Aufgabe 48 auch etwas über Bäume.

Aufgabe 45. Die Färbung $c : [\mathbb{R}^2]^3 \to 2$ färbe eine Menge von drei verschiedenen Punkten $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ mit 1, falls p, q, r auf einer Geraden liegen, sonst mit 0. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind c-homogen?
(a) Die Gerade G mit der Gleichung $y = 2x + 1$ (d.h. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 1\}$)
(b) der Einheitskreis K
(c) die Parabel P mit der Gleichung $y = x^2$
(d) die Kurve C mit der Gleichung $y = x^3$.

Aufgabe 46. Wir betrachten eine beliebige Funktion $f : \omega \to \omega$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ von natürlichen Zahlen gibt, für die entweder $f(x_m) = f(x_n)$ für alle $m < n < \omega$ oder $f(x_m) < f(x_n)$ für alle $m < n < \omega$ gilt. Und zwar:
(a) mit Hilfe des Satzes von Ramsey
(b) elementar, d. h. ohne den Satz von Ramsey.

Aufgabe 47. (a) Sei A eine unendliche Teilmenge von ω. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Ramsey, dass A eine unendliche Teilmenge B hat, so dass für alle aufsteigenden Tripel $a < b < c$ und $x < y < z$ in B gilt: $a + b + c$ ist genau dann Primzahl, wenn $x + y + z$ Primzahl ist.
(b) p und q seien zwei verschiedene Primzahlen und $A \subseteq \omega$ unendlich. Zeigen Sie, dass A eine unendliche Teilmenge B hat, so dass für alle aufsteigenden Tripel $a < b < c$ und $x < y < z$ in B gilt: p teilt $a + b + c$ genau dann, wenn p auch $x + y + z$ teilt, und q teilt $a + b + c$ genau dann, wenn q auch $x + y + z$ teilt.
Können Sie (a) bzw. (b) auch ohne den Satz von Ramsey zeigen?

Aufgabe 48. k, m, n seien natürliche Zahlen größer gleich 1. Leiten Sie aus dem "unendlichen" Ramsey-Satz $\omega \to (k)^n_m$ den "endlichen" ab: es existiert ein $t \in \omega$ mit $t \to (k)^n_m$.
Anleitung. Annahme nicht. Betrachten Sie dann den Baum T der Höhe ω, dessen r-tes Niveau die Menge $T(r)$ aller Färbungen c von $[r]^n$ mit Farben aus m ist; für $c, d \in T$, etwa $c \in T(r)$ und $d \in T(s)$, gelte $c \leq d$ genau dann, wenn $r \leq s$ und d Fortsetzung von c ist. Wenden Sie auf einen geeigneten Teilbaum T' von T das Lemma von König (19.4 im Skript) an.