11. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe 26. 1. 2012, Besprechung am 2. 2. 2012

Diese Aufgaben sind Fingerübungen zum Begriff des Filters.

Aufgabe 41. $\mu : P(X) \to [0,1]$ sei ein endlich additives Maß.
(a) Dann ist $F = \{a \subseteq X : \mu(a) = 1\}$ ein echter Filter auf X.
(b) Ist μ zweiwertig, d.h. gilt für jedes $a \subseteq X$ $\mu(a) = 0$ oder $\mu(a) = 1$, so ist F Ultrafilter.

Aufgabe 42. Sei F ein Ultrafilter auf der Menge X.
(a) Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften von F äquivalent sind:
(1) F ist fixiert (d.h. nicht frei)
(2) es gibt ein $x \in X$ mit $F = \{a \subseteq X : x \in a\}$
(3) F ist ein Hauptfilter
(4) F enthält eine endliche Menge.
Insbesondere existert auf einer endlichen Menge kein freier Ultrafilter.
(b) Sei X unendlich; dann ist F frei genau dann, wenn der Frechet-Filter auf X in F enthalten ist.

Eine Teilmenge I von $P(X)$ heißt ein *Ideal* auf X, wenn gilt:
$\emptyset \in I$,
für $a \in I$ und $b \subseteq a$ ist $b \in I$,
für $a, b \in I$ ist $a \cup b \in I$.
(Z.B. ist die Familie aller endlichen Teilmengen von X ein Ideal auf X.)
Für $a \subseteq X$ schreiben wir $-a$ statt $X \setminus a$. Für $A \subseteq P(X)$ setzen wir
$A^d = \{-a : a \in A\}$.

Aufgabe 43. (a) Ist $F \subseteq P(X)$ Filter auf X, so ist F^d Ideal auf X (das zu F duale Ideal). Umgekehrt ist für jedes Ideal I auf X I^d Filter (der zu I duale Filter).
In (b) bis (d) sei nun F Filter und I das duale Ideal.
(b) F ist genau dann echt, wenn $X \notin I$.
(c) F ist genau dann Ultrafilter, wenn $I = P(X) \setminus F$ ist.
(d) F ist genau dann κ-vollständig, wenn I κ- vollständiges Ideal ist, d.h. wenn für jedes $M \subseteq I$ mit $|M| < \kappa$ auch $\bigcup M \in I$ ist.
(e) F ist genau dann frei, wenn jede endliche Teilmenge von X in I liegt.

Aufgabe 44. κ sei eine unendliche Kardinalzahl.
(a) Ist κ regulär, so gibt es ein echtes κ-vollständiges Ideal I auf κ, das für jedes $x \in X$ die Menge $\{x\}$ enthält.
(b) Für singuläres κ gibt es kein solches Ideal.