10. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 19. 1. 2012, Besprechung am 26. 1. 2012

In diesem Übungsblatt befassen wir uns hauptsächlich mit dem Begriff der Kofinalität.

Aufgabe 37. κ sei unendliche reguläre Kardinalzahl oder eine der Kardinalzahlen $0, 1$. Geben Sie, soweit möglich, Ordinalzahlen ρ an mit
(a) $cf(\rho) = \kappa$
(b) $cf(\aleph_\rho) = \kappa$.

In der folgenden Aufgabe verallgemeinern wir den Begriff der Kofinalität auf beliebige lineare Ordnungen.

Aufgabe 38. $(X, <_X)$ sei eine lineare Ordnung ohne letztes Element. Wir nennen eine Teilmenge M von X kofinal, falls für jedes $x \in X$ ein $m \in M$ mit $x \leq m$ existiert. Eine Abb $f : \lambda \to X$ von einer Ordinalzahl λ in X heißt (etwas spezieller als in der Vorlesung) kofinal, falls sie streng monoton und $f[\lambda] \subseteq X$ kofinal ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
(a) Es gibt eine kofinale Teilenge M von X, die unter $<_X$ wohlgeordnet ist. Somit gibt es kofinale Abbildungenen von geeeigneten Ordinalzahlen nach X.
Wir defieren $cf(X) = \min\{\lambda \in Ord : \text{ es gibt ein kofinales } f : \lambda \to X\}$.
(b) Ist $f : \lambda \to X$ kofinal, so gilt $cf(X) = cf(\lambda)$.
(c) cfX ist reguläre Kardinalzahl.
(d) $cf(X)$ ist die einzige reguläre Kardinalzahl, die sich kofinal in X abbilden lässt.

Aufgabe 39. κ sei eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl. Eine Funktion $f : \kappa \to \kappa$ heißt *Normalfunktion*, wenn sie streng monoton und *stetig* ist, d.h. für jede Limesordinalzahl $\lambda < \kappa$ gilt $f(\lambda) = \sup_{\nu<\lambda} f(\nu)$. Eine Teilmenge C von κ heißt *club* (*cl*osed *un*bounded) in κ, falls sie kofinal in κ ist und für jede nichtleere beschränkte Teilmenge M von C das Supremum von M zu C gehört. Z.B. ist die Menge aller Limesordinalzahlen $\lambda < \kappa$ club in κ. Beweisen Sie:
(a) Für jede Normalfunktion $f : \kappa \to \kappa$ ist der Wertebereich von f club in κ.
(b) Für jede club Teilmenge C von κ gibt es (genau eine) Normalfunktion von κ nach κ mit Wertebereich C.

Aufgabe 40. Skizzieren Sie, ausgehend von der Struktur $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$, die Konstruktion der Zahlbereiche $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Welche Axiome von ZFC gehen dabei ein?