9. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 15. 12. 2011, Besprechung am 5. 1. 2012

Da dies das letzte Übungsblatt in diesem Jahr ist, wünsche ich allen Vorlesungs- bzw. ÜbungsteilnehmerInnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Aufgabe 33. Ordnen Sie die folgenden Kardinalzahlen der Größe nach. Soweit es in ZFC möglich ist, bestimmen Sie, welche von ihnen gleich sind.

$$3^{\aleph_0}, \aleph_0 \cdot \aleph_1, \aleph_0 \cdot 3, \aleph_0^{\aleph_1}, \aleph_0, 2^{\aleph_1}, \aleph_0^3, \aleph_1^{\aleph_0}, 2^{\aleph_1}, \aleph_1, \aleph_1 \cdot \aleph_0.$$

In Aufgabe 34 dürfen Sie als bekannt voraussetzen: $|\mathbb{Q}| = \omega$; $|\mathbb{R}| = 2^\omega$; jedes nichtkonstante Polynom (mit Grad $n \geq 1$) über einem Körper K hat in jeder Körpererweiterung L von K nur endlich viele (nämlich höchstens n) Nullstellen.

Aufgabe 34. Sei K eine unendliche Menge und $|K| = \kappa$.

(a) Wie viele endliche Teilmengen hat K?

(b) Wie viele endliche Folgen $(x_1, \ldots, x_n)$ (mit $n \in \omega$ und $x_i \in K$) gibt es über K?

(c) Sei K die Trägermenge eines Körpers. Wie viele Polynome (in einer Variablen t) gibt es über K?

(d) Wir betrachten die Körpererweiterung $K = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = L$. Eine reelle Zahl u heißt algebraisch (über $\mathbb{Q}$), wenn u Nullstelle eines nichtkonstanten Polynoms über $\mathbb{Q}$ ist, sonst transzendent. Wie viele algebraische reelle Zahlen gibt es? Wie viele transzendente?

Aufgabe 35. Sei X eine Menge mit $|X| = \kappa \geq \omega$; λ, μ seien unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$, $\mu \leq \kappa^+$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Die Menge S_X aller Permutationen von X hat die Kardinalzahl 2^κ.

(b) Die Menge $[X]^\lambda = \{a \subseteq X : |a| = \lambda\}$ hat die Kardinalzahl κ^λ.

(c) Die Menge $[X]^{<\mu} = \{a \subseteq X : |a| < \mu\}$ hat die Kardinalzahl $\kappa^{<\mu} = \sum_{\lambda<\mu} \kappa^\lambda$.

Aufgabe 36. Eine Abbildung $F : Ord \to Ord$ heißt *Normalfunktion*, falls sie streng monoton und stetig ist (d.h. für jede Limesordinalzahl λ ist $F(\lambda) = \sup_{\nu<\lambda} F(\nu)$).

Eine Klasse $C \subseteq Ord$ heißt *unbeschränkt*, falls für jedes $\alpha \in Ord$ ein $\gamma \in C$ mit $\alpha \leq \gamma$ existiert; *abgeschlossen*, falls für jede nichtleere Teilmenge M von C $\sup M \in C$ gilt; *club* (closed unbounded), falls sie unbeschränkt und abgeschlossen ist.

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Eine Klasse $C \subseteq Ord$ ist genau dann club, wenn C der Wertebereich $F[Ord]$ einer Normalfunktion F ist.

(b) Für jede Normalfunktion F ist die Klasse

$$Fix(F) = \{\alpha \in Ord : F(\alpha) = \alpha\}$$

der Fixpunkte von F club.

Ein populäres Beispiel: die Aleph-Funktion (siehe Kapitel 11 im Skript) ist Normalfunktion; ihr Wertebereich ist die Klasse aller unendlichen Kardinalzahlen. Teil (b) der Aufgabe zeigt, dass für "viele" $\alpha \in Ord$ die Gleichung $\aleph_\alpha = \alpha$ gilt.