6. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 24. 11. 2011
Besprechung: am 1. 12. 2011

Aufgabe 21. Wir geben im Folgenden Mengensysteme A, B, C an. Stellen Sie fest, ob die Relationen "a ist echte Teilmenge von b" bzw. "a ist echte Obermenge von b" auf A, B, C fundiert sind. Hierbei sei

$$A = P(\mathbb{N}),$$
$$B = \{a \in P(\mathbb{N}) : a \text{ ist Anfangsstück von } (\mathbb{N}, <)\},$$
$$C = \{a \in P(\mathbb{Z}) : a \text{ ist Ideal im Ring } (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)\}.$$

Aufgabe 22. Beweisen Sie die Aussagen am Ende von Kapitel 9 des Skripts über die Rang-Funktion $rk : V \to Ord$, genauer:
(a) für $\alpha \in Ord$ ist $V_\alpha = \{x \in V : rk(x) < \alpha\}$
(b) aus $x \in y$ folgt $rk(x) < rk(y)$
(c) für jede Ordinalzahl α ist $rk(\alpha) = \alpha$ (und deshalb $V_\alpha \cap Ord = \alpha$).
Dabei dürfen bzw. müssen Sie das Fundierungsaxiom und Satz 9.5 benutzen.

Aufgabe 23. X sei eine Klasse, E eine zweistellige Relation auf X, und für jedes $x \in X$ sei $ext_E x$ Menge. Eine Funktion $r : X \to Ord$ heißt eine Rang-Funktion für (X, E), falls für $x, y \in X$ aus xEy die Ungleichung $r(x) < r(y)$ folgt.

Zeigen Sie, dass die Relation (X, E) genau dann eine Rang-Funktion hat, wenn E fundiert ist.

Wir setzen die Aufgabenserie 8, 12, 16 fort.

Aufgabe 24. $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \varepsilon)$ sei die Struktur aus den Aufgaben 8, 12, 16.
(a) Zeigen Sie, dass jede (i. S. von $\mathcal{M}$) nichtleere Menge ein $\in$-minimales und auch ein $\in$-maximales Element hat.
(b) Folgern Sie, dass in $\mathcal{M}$ das Fundierungsaxiom, aber nicht das Unendlichkeitsaxiom gilt. Damit folgt (Unendl) nicht aus (Ext), (Aus) (Null), (Pa), (Ver), (Ers), (Pot), (Fund).