# 2. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

*Sabine Koppelberg*
*Ausgabe: 27. 10. 2011*
*Besprechung am 3. 11. 2011*

**Aufgabe 5.** $F$ sei eine Funktion (die auch echte Klasse sein darf). Zeigen Sie:
(a) Ist $F$ injektiv, so gilt für beliebige Klassen $A, B$ stets $F[A \cap B] = F[A] \cap F[B]$.
(b) Für nicht-injektives $F$ gibt es Mengen $A, B$ mit $F[A \cap B] \neq F[A] \cap F[B]$.

Die Behauptungen von Aufgabe 6 lassen sich routinemäßig nachrechnen, es sind aber eine ganze Reihe von Einzelheiten zu zeigen.

**Aufgabe 6.** $X$ sei eine Menge, $\mathbf{P}$ die Klasse aller Partitionen von $X$, $\mathbf{E}$ die Klasse aller Äquivalenzrelationen auf $X$. Zeigen Sie:
(a) $\mathbf{P}$ und $\mathbf{E}$ sind Mengen.
(b) Die auf Seite 16 des Skripts beschriebenen Zuordnungen $\phi : \mathbf{P} \to \mathbf{E}$ und $\psi : \mathbf{E} \to \mathbf{P}$ sind bijektiv und zueinander invers.

**Aufgabe 7.** $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ seien total geordnete Klassen; wir definieren auf $X \times Y$ die so genannte lexikographische Ordnung $<$ durch

$$(x, y) < (s, t) \text{ genau dann, wenn } x <_X s \text{ oder } (x = s \text{ und } y <_Y t).$$

(a) Zeigen Sie, dass $<$ eine totale Ordnung auf $X \times Y$ ist.
(b) Beschreiben Sie in Worten und durch eine Zeichnung die lexikographische Ordnung auf $X \times Y$, wobei $X = \mathbb{N}$ und $Y = \mathbb{R}$ mit ihren üblichen Ordnungen versehen seien.
(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$, mit ihren lexikographischen Ordnungen versehen, nicht isomorph sind.

Aufgabe 8 ist eine Fortsetzung von Aufgabe 4; wir betrachten jedoch eine wesentlich interessantere Struktur $(M, \varepsilon)$. In den folgenden Übungsblättern werden wir sehen, dass in $(M, \varepsilon)$ fast alle ZF-Axiome gelten.

**Aufgabe 8.** Es sei $M = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Bekanntlich lässt sich jede natürliche Zahl $n$ eindeutig in der Form

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_r}$$

schreiben, wobei $k_1 > k_2 > \cdots > k_r$ natürliche Zahlen sind (für $n = 0$ ist $r = 0$ zu setzen). Zum Beispiel ist $53 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$.
Nun definieren wir die Relation $\varepsilon$ auf $M$ durch

$$k \;\varepsilon\; n \text{ genau dann, wenn } k \text{ eine der Zahlen } k_1, \dots, k_r \text{ ist.}$$

$n = 53$ hat also in der Struktur $(M, \varepsilon)$ genau die Elemente 0, 2, 4 und 5.
(a) Welches sind im Sinne von $(M, \varepsilon)$ die Elemente von $n = 77$? Sind, im Sinne von $(M, \varepsilon)$, 13 bzw. 28 Teilmengen von 77?
(b) Zeigen Sie, dass die Axiome (Ext), (Null) und (Pa) in $(M, \varepsilon)$ gelten.

**Aufgabe** 8$'$**.** Zeigen Sie, dass für je zwei Mengen $a, b$ auch $a \times b$ Menge ist. Dabei dürfen Sie, außer den Axiomen (Ext), (Pa), (Ver), das Ersetzungsaxiom, aber nicht das Potenzmengenaxiom benutzen. (Dieser Beweis ist viel natürlicher als der in Kapitel 3 des Skripts.)