17.8 Definition (κ-vollständige Filter) Ein Filter F heißt κ-vollständig (wobei $\kappa \in Card$, $\kappa \geq \omega$), falls für $A \subseteq F$ mit $|A| < \kappa$ stets $\bigcap A \in F$ ist.

Jeder Filter ist also ω-vollständig.

Ist F freier κ-vollständiger Ultrafilter und $a \in F$, so $|a| \geq \kappa$: denn für $x \in X$ ist $\{x\} \notin F$ (sonst wäre F der von $\{x\}$ erzeugte Hauptfilter), also $X \setminus \{x\} \in F$. Für $a \subseteq X$ mit $|a| < \kappa$ ist

$$X \setminus a = \bigcap_{x \in a} X \setminus \{x\} \in F,$$

also $a \notin F$.

17.9 Definition (meßbare Kardinalzahl) Eine Kardinalzahl κ heißt meßbar, falls $\kappa > \omega$ und es einen freien κ-vollständigen Ultrafilter auf κ gibt.

Die Bezeichnung "meßbar" stammt von folgender Analogie: Ist D Ultrafilter auf X, so wird

$$\mu_D : P(X) \to 2 = \{0,1\} \subseteq [0,1]$$
$$\mu_D(a) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein endlich additives Maß; umgekehrt liefert jedes solche Maß einen Ultrafilter. D ist κ-vollständig genau dann, wenn μ_D κ-additiv ist.

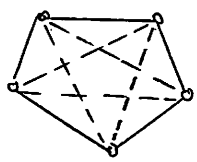
17.10 Bemerkung Meßbare Kardinalzahlen sind "sehr groß"; z.B. zeigen wir in Kapitel 18:

κ meßbar $\Rightarrow$ κ schwach kompakt $\Rightarrow$ κ stark unerreichbar;

die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen ist in ZFC nicht beweisbar.

18. Partitionsresultate

18.1 Ein Beispiel Wir haben fünf Punkte und färben ihre Verbindungsgeraden mit zwei Farben, schwarz und weiß.

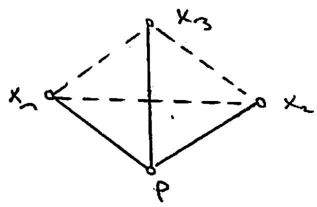


——————— schwarz

- - - - - - - weiß

Gibt es drei Punkte, so daß alle drei Verbindungsgeraden dieselbe Farbe haben? Offenbar nicht.

Haben wir aber sechs Punkte und färben die Verbindungen beliebig schwarz oder weiß, so gibt es ein "einfarbiges Dreieck":



man hält einen der Punkte fest, etwa p. Es gibt drei Punkte, etwa x_1, x_2, x_3, so daß alle Verbindungen $\overline{px_i}$ dieselbe Farbe haben, etwa schwarz.
Ist eine der Kanten $\overline{x_i x_j}$ $(1 \le i < j \le 3)$ schwarz, so haben wir ein schwarzes Dreieck: p, x_i, x_j. Sonst sind alle drei Kanten $\overline{x_i x_j}$ weiß, und x_1, x_2, x_3 ist ein weißes Dreieck.

<u>18.2 Notation</u> (a) X sei Menge, ϱ Kardinalzahl.

$$[X]^\varrho := \{a \subseteq X \mid |a| = \varrho\}$$

Jede Funktion $c : [X]^\varrho \to I$ (I eine Menge) nennen wir eine Färbung (i.a. ist ϱ endlich, meist auch I; oft ist $\varrho = |I| = 2$), $c(a)$ ist die "Farbe" von a. Färbungen entsprechen bijektiv "Partitionen" $[X]^\varrho = \bigcup_{i \in I} P_i$ (mit $P_i := \{a \subseteq X \mid c(a) = i\}$).

(b) $H \subseteq X$ heißt homogen für die Färbung $c : [X]^\varrho \to I$ (kurz: c-homogen mit Farbe i), wenn es ein $i \in I$ gibt mit:

$$c[[H]^\varrho] = \{i\},$$

d.h. $\quad a \in [H]^\varrho \Rightarrow c(a) = i$.

(c) $\kappa, \lambda, \varrho, \sigma$ seien Kardinalzahlen. $\kappa \to (\lambda)^\varrho_\sigma$ ist Abkürzung für die Aussage:

für jede $c : [\kappa]^\varrho \to \sigma$ gibt es $H \subseteq \kappa$, $|H| = \lambda$, H c-homogen.

(ist $\kappa \to (\lambda)^\varrho_\sigma$ falsch, so schreiben wir: $\kappa \not\to (\lambda)^\varrho_\sigma$).
Nach 18.1 gilt also:

$$5 \not\to (3)^2_2, \qquad 6 \to (3)^2_2,$$

"Partitionssätze" sind Sätze der Form $\kappa \to (\lambda)^\varrho_\sigma$. Mit Bijektionen $X \leftrightarrow \kappa$, $I \leftrightarrow \sigma$ sieht man:

$\kappa \to (\lambda)^\varrho_\sigma \iff$ ist $|X| = \kappa$, $|I| = \sigma$ und $c : [X]^\varrho \to I$, so existiert $H \subseteq X$, $|H| = \lambda$, H c-homogen.

<u>18.3 Proposition</u> (Monotoniegesetze) Gelte $\kappa \to (\lambda)^\varrho_\sigma$; sei $\kappa \le \kappa'$, $\lambda' \le \lambda$, $\sigma' \le \sigma$. Dann gilt $\kappa' \to (\lambda')^\varrho_{\sigma'}$.

Beweis. Sei $c' : [\kappa']^\varrho \to \sigma'$ gegeben. Wegen $\sigma' \le \sigma$ ist auch

$$c' : [\kappa']^\varrho \to \sigma.$$

$c := c' \restriction [\kappa]^\varrho$ ist Abbildung von $[\kappa]^\varrho$ nach σ; also gibt es

$H \subseteq \kappa$, $|H| = \lambda$, H c-homogen mit Farbe i. Wähle (wegen $\lambda' \leq \lambda$) $H' \subseteq H$ mit $|H'| = \lambda'$. H' ist c'-homogen mit Farbe i.

∎

18.4 Bem. und Definition Sei $\kappa \geq \omega$. $\kappa \to (\kappa)^1_2$ und $\kappa \to (\kappa)^2_1$ gelten trivialerweise. Die "einfachste" nichttriviale Partitionsrelation auf κ ist daher $\kappa \to (\kappa)^2_2$.
$\kappa \in Card$ heißt schwach kompakt, falls $\kappa > \omega$ und $\kappa \to (\kappa)^2_2$ gilt. (Die Bezeichnung stammt aus der Logik: $\kappa \to (\kappa)^2_2$ gilt genau dann, wenn für die Logik $L_{\kappa\kappa}$ der schwache Kompaktheitssatz gilt.)

18.5 Satz Gibt es auf κ einen freien κ-vollständigen Ultrafilter, so gilt $\kappa \to (\kappa)^n_2$ für alle $n \in \omega$.

18.6 Korollar (Satz von Ramsey) $\omega \to (\omega)^2_2$.
Beweis. Auf ω gibt es nach 17.7 einen freien Ultrafilter D; er ist ω-vollständig.

∎

18.7 Folgerung (aus 18.6) $(P, <)$ sei eine unendliche Halbordnung. Dann hat P eine unendliche Kette oder eine unendliche Antikette A (d.h. für $a \neq b$ in A ist $a \nleq b$, $b \nleq a$).
Beweis. Betrachte $c: [P]^2 \to 2$; $c(\{p,q\}) = 0 :\Leftrightarrow p, q$ sind vergleichbar in $(P, <)$. Wegen $|P| \geq \omega$ gilt $|P| \to (\omega)^2_2$ (18.6 und 18.3); also existiert ein homogenes unendliches $H \subseteq P$. Hat jedes $\{p,q\} \in [H]^2$ die Farbe 0, so ist H Kette, sonst Antikette.

∎

18.8 Korollar Jede meßbare Kardinalzahl ist schwach kompakt.

18.9 Lemma (für den Beweis von 18.5) Aus $\kappa \to (\kappa)^n_2$ folgt $\kappa \to (\kappa)^n_m$ für alle $m \geq 2$.
Beweis. Gelte $\kappa \to (\kappa)^n_2$, $m \geq 2$ und $\kappa \to (\kappa)^n_m$; wir zeigen $\kappa \to (\kappa)^n_{m+1}$. Sei also

$$[\kappa]^n = P_1 \cup \ldots \cup P_{m+1} = (P_1 \cup \ldots \cup P_m) \cup P_{m+1}.$$

Falls $H \subseteq \kappa$, $|H| = \kappa$ existiert mit $[H]^n \subseteq P_{m+1}$, sind wir fertig. Sonst existiert wegen $\kappa \to (\kappa)^n_2$ $H \subseteq \kappa$ mit

$[H]^m \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_n$ und wegen $\kappa \to (\kappa)^m_n$ $\exists H' \subseteq H$ mit $|H'| = \kappa$, $[H']^m \subseteq P_i$ für ein $i \in \{1 \dots n\}$. ∎

<u>Beweis von 18.5</u> Sei D freier, κ-vollständiger Ultrafilter auf κ. Für $\alpha \in \kappa$ ist $\alpha \notin D$ (wegen $|\alpha| \leq \alpha < \kappa$; siehe 17.8) und daher $\kappa \setminus \alpha \in D$.

Sei $[\kappa]^m = P_0 \cup P_1$ gegeben (dieser Fall reicht nach 18.9). Wir definieren für $k = m, m-1, \dots, 1$ und $i \in 2 = \{0,1\}$ $P_i^k \subseteq [\kappa]^k$ induktiv; es wird

$$(*)_k \qquad [\kappa]^k = P_0^k \cup P_1^k$$

gelten. Setze $P_i^m := P_i$ für $i \in 2$; $(*)_m$ gilt also. Seien P_i^{k+1} bereits definiert mit $(*)_{k+1}$; setze dann

$$P_i^k := \{e \in [\kappa]^k : \{\xi \in \kappa \mid e \ll \xi,\ e \cup \{\xi\} \in P_i^{k+1}\} \in D\}.$$

(dabei bedeutet $e \ll \xi$: $\nu < \xi$ für alle $\nu \in e$). $(*)_k$ gilt, da für $e \in [\kappa]^k$:

$$\{\xi \in \kappa \mid e \ll \xi\} \in D$$
$$= \{\xi \in \kappa \mid e \ll \xi,\ e \cup \{\xi\} \in P_0^{k+1}\} \cup \{\xi \in \kappa \mid e \ll \xi,\ e \cup \{\xi\} \in P_1^{k+1}\}$$

nach $(*)_{k+1}$ und D ist Primfilter.

Für $k = 1$ erhält man schließlich mit $(*)_1$: $\kappa = P_0^1 \cup P_1^1 \in D$, also $P_0^1 \in D$ oder $P_1^1 \in D$. OBdA sei $P_0^1 \in D$.

Wir konstruieren induktiv $(i_\nu)_{\nu < \kappa}$ in κ mit $i_0 < i_1 < \dots$;

$$H := \{i_\nu : \nu \in \kappa\}$$

wird homogen mit Farbe 0 sein. Für $\alpha < \kappa$ und

$$H_\alpha := \{i_\nu : \nu < \alpha\}$$

soll gelten:

$(**)_\alpha$ für $1 \leq k \leq m$ ist $[H_\alpha]^k \subseteq P_0^k$.

Wähle dazu $i_0 \in P_0^1$ $(\in D)$ beliebig. Sei bereits i_ν konstruiert für $\nu < \alpha$, also H_α bekannt, und gelte $(**)_\alpha$; wir konstruieren i_α (damit $H_{\alpha+1}$) mit $(**)_{\alpha+1}$.

Für $1 \leq k \leq m$ und $e \in [H_\alpha]^k$ ist $e \in P_0^k$ nach $(**)_\alpha$, also

$$X_e := \{\xi \in \kappa \mid e \ll \xi,\ e \cup \{\xi\} \in P_0^{k+1}\} \in D,$$

$$X := \bigcap \{X_e \mid e \in [H_\alpha]^k,\ 1 \leq k \leq m\} \in D$$

da D κ-vollständig und $|[H_\alpha]^k| \leq |H_\alpha| \cdot \omega < \kappa$).

Wähle $i_\alpha \in X \cap \sigma$ mit $\sigma := \sup\{i_\nu + 1 \mid \nu < \alpha\}$; das ist wegen $\sigma < \kappa$ und $X \in D$ möglich (κ ist regulär, wegen der Existenz von D). Damit gilt $(**)_\alpha$.
Ist λ Limesordinalzahl $< \kappa$, so folgt $(**)_\lambda$ aus $(**)_\alpha$, für $\alpha < \lambda$.

H ist homogen mit Farbe 0: sei $e \subseteq H$, $|e| = m$. Etwa $e \subseteq H_\alpha$ mit $\alpha < \kappa$. Nach $(**)_\alpha$ ist $e \in P_0^m = P_0$. ∎

<u>18.10 Anwendung</u> (auf lineare Ordnungen) Gilt $\kappa \to (\lambda)^2_2$, und ist $(L, <)$ lineare Ordnung mit $|L| \geq \kappa$, so existiert $H \subseteq L$ mit $|H| = \lambda$, das (von $< \restriction H$) wohlgeordnet oder invers wohlgeordnet wird (d.h. $(H, < \restriction H)$ oder $(H, > \restriction H)$ ist Wohlordnung).

Beweis. Wegen $|L| \geq \kappa$ gilt $|L| \to (\lambda)^2_2$ (siehe 18.3).
Sei $\prec$ eine beliebige Wohlordnung von L. Für $e = \{x, y\} \in [L]^2$ setze

$$c(e) := \begin{cases} 0 & \text{falls } (x < y,\ x \prec y) \text{ oder } (x > y,\ x \succ y) \\ 1 & \text{falls } (x < y,\ x \succ y) \text{ oder } (x > y,\ x \prec y). \end{cases}$$

Sei $H \subseteq L$ c-homogen, $|H| = \lambda$. Hat H die Farbe 0, so ist $(H, < \restriction H)$ Wohlordnung, da $< \restriction H$ mit $\prec \restriction H$ übereinstimmt; sonst ist $(H, > \restriction H)$ Wohlordnung. ∎

<u>18.11 Proposition</u> Sei $\lambda \geq \omega$ Kardinalzahl. Dann $2^\lambda \not\to (\lambda^+)^2_2$.
Beweis: Wir definieren auf $L := {}^\lambda 2$ die "lexikographische Ordnung":

$$f <_L g :\Leftrightarrow f \neq g, \text{ und für } \alpha = d(f, g) := \min\{\alpha \in \lambda \mid f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \text{ ist } f(\alpha) < g(\alpha)$$
$$(\text{also } f(\alpha) = 0,\ g(\alpha) = 1).$$

$(L, <_L)$ ist lineare Ordnung und $|L| = 2^\lambda$.

<u>Behauptung 1</u> In L gibt es keine streng monoton wachsende (bzw. fallende) wohlgeordnete Folge vom Typ λ^+.
(Mit 18.10 ist dann 18.11 gezeigt.)
Annahme: es gibt $(f_\alpha)_{\alpha < \lambda^+}$ in L mit: $\alpha < \beta < \lambda^+ \Rightarrow f_\alpha <_L f_\beta$ (für fallende Folgen verläuft der Beweis analog). Setze

$$F := \{f_\alpha \mid \alpha < \lambda^+\}.$$

Für $\gamma \in \lambda$ sei

$$F_\gamma := \{f \in F \mid \text{ex. } g \in F \text{ mit } f < g,\ d(f, g) = \gamma,\ \gamma \text{ minimal mit (ex. } g \ldots)\};$$

wir nennen $g \in F$ einen Zeugen für $f \in F_\gamma$, wenn die obige Situation eintritt.

Es ist $F = \bigcup_{\gamma\in\lambda} F_\gamma$ (da F unter $<_L$ geordnet vom Typ λ^+); wir zeigen $|F_\gamma| \le \lambda$ für $\gamma < \lambda$, woraus der Widerspruch $|F| \le \lambda$ folgt.

Behauptung 2 Sei $f \in F_\gamma$, $g \in F$, $f \lneq_L g$, $d(f,g) = \gamma$. Dann ist $f' \lneq_L g$ für alle $f' \in F_\gamma$.

Denn: $g \notin F_\gamma$ (da $g(\gamma) = 1$, $f'(\gamma) = 0$ für $f' \in F_\gamma$).

Sei $f' \in F_\gamma$; wäre $g \lneq_L f'$, so $f \lneq_L g <_L f'$, $f \lneq_L f'$.

Aber: $g \upharpoonright \gamma = f \upharpoonright \gamma = f' \upharpoonright \gamma$ (da $f \in F_\gamma$, $f \lneq_L f'$, Definition von F_γ),

$f'(\gamma) = 0 \Rightarrow f' \lneq_L g$ (da $g(\gamma) = 1$), Widerspruch

$f'(\gamma) = 1 \Rightarrow$ Widerspruch zu $f' \in F_\gamma$. $\square$ (Beh. 2)

Um $|F_\gamma| \le \lambda$ zu zeigen, wähle man $f \in F_\gamma$ und zu f einen Zeugen $g \in F$. Etwa $g = f_\delta$, $\delta < \lambda^+$. Nach Beh. 2 ist

$$F_\gamma \subseteq \{f_\nu \mid \nu < \delta\};$$

und $|\{f_\nu \mid \nu < \delta\}| \le |\delta| \le \lambda$. $\square$ (Beh. 1) $\blacksquare$

<u>18.12 Satz</u> (Erdős-Rado) Für jede unendliche Kardinalzahl λ gilt $(2^\lambda)^+ \to (\lambda^+)^2_2$.

Beweis. Sei $c : [X]^2 \to 2$ gegeben, $X := (2^\lambda)^+$. Für $\alpha < \lambda^+$ definieren wir induktiv Mengen $B_\alpha \subseteq X$ mit $|B_\alpha| = 2^\lambda$, $\alpha < \beta \Rightarrow B_\alpha \subsetneq B_\beta$.

B_0 sei beliebig mit $|B_0| = 2^\lambda$. Falls $\alpha \in Lim \cap \lambda^+$, setze $B_\alpha := \bigcup_{\nu<\alpha} B_\nu$. $B_{\alpha+1}$ konstruieren wir so:

für $Z \subseteq B_\alpha$ und $x \in X \setminus B_\alpha$ (also $x \notin Z$) sei

$$\left.\begin{array}{l} tp(x, Z) : Z \to 2 \\ \qquad z \mapsto c(z, x) \end{array}\right\}.$$

Wähle man $B_{\alpha+1} \supseteq B_\alpha$ mit $|B_{\alpha+1}| = 2^\lambda$ und

(*) $\left.\begin{array}{l} Z \subseteq B_\alpha \\ |Z| \le \lambda \end{array}\right\}$, $x \in X \setminus B_\alpha \Rightarrow$ ex. $x' \in B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha$ mit $tp(x, Z) = tp(x', Z)$.

Das geht, da nur 2^λ-viele $Z \subseteq B_\alpha$ mit $|Z| \le \lambda$ existieren und zu jedem solchen Z nur 2^λ-viele $tp(x, Z)$ existieren. –

Setze $B := \bigcup_{\alpha<\lambda^+} B_\alpha$; also $|B| = 2^\lambda$.

Wähle $u \in X \setminus B$ fest; wähle induktiv $x_\alpha \in B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha$ so:

$$Z := \{x_\nu \mid \nu < \lambda^+\}$$

$$Z_\alpha := \{x_\nu \mid \nu < \alpha\} \subseteq B_\alpha \text{ also;}$$

ist Z_α bekannt, so wähle x_α mit $tp(x_\alpha, Z_\alpha) = tp(u, Z_\alpha)$ – das geht wegen (*).

Nach Konstruktion sind die x_α verschieden. Nun ist

$$\lambda^+ = \{\alpha \mid c(u, x_\alpha) = 0\} \cup \{\alpha \mid c(u, x_\alpha) = 1\}$$
$$=: A_0 \cup A_1 .$$

OBdA sei $|A_0| = \lambda^+$.

$$H := \{x_\alpha \mid \alpha \in A_0\}$$

ist c-homogen mit Farbe 0: denn für $\alpha < \alpha'$ in A_0 ist $x_\alpha \in Z_{\alpha'}$, $c(u, x_\alpha) = 0$, $tp(x_{\alpha'}, Z_{\alpha'}) = tp(u, Z_{\alpha'})$, also $c(x_{\alpha'}, x_\alpha) = 0$. ∎

<u>18.13 Proposition</u> Jede schwach kompakte Kardinalzahl ist stark unerreichbar.

Beweis. Sei κ schwach kompakt, also $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Wir haben die Behauptungen (1) – (3) zu zeigen.

(1) $\kappa > \omega$: nach Definition von "schwach kompakt"

(2) $\lambda < \kappa \Rightarrow 2^\lambda < \kappa$: sonst wäre $\lambda^+ \leq \kappa \leq 2^\lambda$; nach 18.3 folgte $2^\lambda \to (\lambda^+)^2_2$, Widerspruch zu 18.11.

(3) κ regulär: sonst gibt es eine Partition $\kappa = \bigcup_{i \in I} X_i$ von κ mit $|I| < \kappa$, $|X_i| < \kappa$ für $i \in I$. Wir schreiben

$$[\kappa]^2 = P_0 \cup P_1$$

mit : $\{x, y\} \in P_0 :\Leftrightarrow$ es gibt $i \in I$ mit $x, y \in P_i$,

$$P_1 := [\kappa]^2 \setminus P_0 .$$

Wegen $\kappa \to (\kappa)^2_2$ wähle $H \subseteq \kappa$, $|H| = \kappa$, $[H]^2 \subseteq P_\varepsilon$.

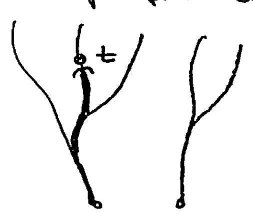
Ist $\varepsilon = 0$, so $H \subseteq X_i$ für ein i; Widerspruch zu $|X_i| < \kappa$.

Für $\varepsilon = 1$ folgt: $|H \cap X_i| \leq 1$ für alle $i \in I$; Widerspruch zu $|I| < \kappa$.

∎

19. Bäume

<u>19.1 Definition</u> Ein Baum ist eine halbgeordnete Menge $(T, <)$, so daß für alle $t \in T$ die Menge $<t = \{x \in T \mid x < t\}$ durch $<$ wohlgeordnet wird.



$ht(t) :=$ der Ordnungstyp von $<t$
$= $ das $\alpha \in Ord$ mit $(<t, <) \cong (\alpha, \in_\alpha)$

ist die Höhe von t (in T).