Kapitel 12 auf λ). Für $j \in \lambda$ sei A_j das Bild von $\{j\}\times\lambda$ unter φ. D.h. $\lambda = \bigcup_{j\in\lambda} A_j$, und $|A_j| = \lambda$ für $j \in \lambda$. Für $i \in A_j$ ist $\kappa_i \le \prod_{i\in A_j} \kappa_i$. Da $A_j \subseteq \lambda$ kofinal (wegen $|A_j| = \lambda$), ist $\kappa = \sup_{i\in A_j} \kappa_i \le \prod_{i\in A_j} \kappa_i$. Es folgt

$$\kappa^\lambda = \prod_{j\in\lambda} \kappa \le \prod_{j\in\lambda}\ \prod_{i\in A_j} \kappa_i = \prod_{i<\lambda} \kappa_i . \blacksquare$$

<u>14.4. Satz</u> (König) Ist $\kappa_i < \lambda_i$ für jedes $i \in I$, so $\sum_{i\in I}^! \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$.

Beweis. Für $i \in I$ sei X_i Menge mit $|X_i| = \lambda_i$; setze $X := \prod_{i\in I} X_i$. Wäre $\sum_{i\in I}^! \kappa_i \ge \prod_{i\in I} \lambda_i = |X|$, so existierten Teilmengen A_i von X mit $|A_i| \le \kappa_i$ und $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Für $i \in I$ sei

$$P_i := \{c(i) \mid c \in A_i\}$$

die „i-te Projektion von A_i", also $P_i \subseteq X_i$. Wegen $|X_i| = \lambda_i > \kappa_i \ge |A_i| \ge |P_i|$ existiert $x_i \in X_i \setminus P_i$. $c := (x_i)_{i\in I}$ ist eine Funktion in X, die in keinem A_i liegt, denn aus $c \in A_i$ folgte $c(i) = x_i \in P_i$! $\blacksquare$

<u>14.5. Korollar</u> a) Für $2 \le \lambda$ und $\omega \le \kappa$ ist $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda^\kappa)$, insbesondere $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa) \le 2^\kappa$.

b) Für $\kappa \ge \omega$ ist $\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa} > \kappa$.

Beweis. a) Sei $\mu \le \kappa$ und $\kappa_i < \lambda^\kappa$ für $i < \mu$; wegen der Folgerung von 14.1 reicht es zu zeigen, daß $\sum_{i<\mu}^! \kappa_i < \lambda^\kappa$. Aber nach 14.4 ist

$$\sum_{i<\mu}^! \kappa_i < \prod_{i<\mu} (\lambda^\kappa) = (\lambda^\kappa)^\mu = \lambda^{\kappa\cdot\mu} = \lambda^\kappa .$$

b) Wähle $\kappa_i < \kappa$ für $i < \mathrm{cf}(\kappa)$ mit $\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)}^! \kappa_i$. Es ist

$$\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}\,\kappa}^! \kappa_i < \prod_{i<\mathrm{cf}\,\kappa} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} . \blacksquare$$

15. Potenzen von Kardinalzahlen (Fortsetzung)

Über die sog. Kontinuumfunktion von $\mathrm{Card}\setminus\omega$ nach $\mathrm{Card}\setminus\omega$, die jedem κ die Potenz 2^κ zuordnet, wissen wir bisher:

a) $\kappa \le \lambda \implies 2^\kappa \le 2^\lambda$

b) $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa)$ $(\le 2^\kappa)$ nach 14.5, a).

Für reguläre Werte von κ gibt es, wie Easton gezeigt hat, keine weiteren Beschränkungen. In 15.1 und 15.2 ziehen wir einige Folgerungen aus a), b) über die Kontinuumfunktion. Im Rest des Kapitels werden Aussagen für λ^κ ($\kappa, \lambda \in Card \setminus \omega$) gemacht, die in 15.5 zusammengefaßt werden.

<u>Def</u> Schreibweisen wie $\sum\limits_{\lambda<\kappa} \ldots$, $\prod\limits_{\mu<\kappa} \ldots$, $\sup\limits_{\lambda<\kappa} \ldots$ bedeuten, daß die Indexmenge $\{\lambda \in Card \mid \lambda < \kappa\}$ sein soll (λ, μ sind bei uns Bezeichnungen für Kardinalzahlen). Ist $\{\alpha \in Ord \mid \alpha < \kappa\}$ gemeint, so schreiben wir $\sum\limits_{\alpha<\kappa} \ldots$, $\prod\limits_{\xi<\kappa} \ldots$ (α, ξ stehen für Ordinalzahlen). Es sei

$$\mu^{<\kappa} := \sup_{\lambda<\kappa} \mu^\lambda$$

die „schwache Potenz" von μ und κ; manchmal auch $\mu^{\underline{\kappa}}$ geschrieben; es gilt $\mu^{<\kappa} \leq \mu^\kappa$.

<u>15.1. Lemma</u> Ist κ Limeskardinalzahl, so $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf\,\kappa}$.

Beweis. Sei $\kappa = \sum\limits_{i<cf\,\kappa} \kappa_i$ mit $\kappa_i < \kappa$ für $i < cf(\kappa)$. Es ist

$$2^\kappa = 2^{\sum \kappa_i} = \prod_{i<cf\,\kappa} 2^{\kappa_i} \leq \prod_{i<cf\,\kappa} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{cf\,\kappa}$$
$$\leq (2^\kappa)^{cf\,\kappa} = 2^{\kappa \cdot cf\,\kappa} = 2^\kappa. \blacksquare$$

<u>15.2. Satz</u> a) κ sei singulär, und es gebe ein $\lambda_0 < \kappa$, so daß für $\lambda_0 \leq \lambda < \kappa$ $2^\lambda = 2^{\lambda_0}$. Dann ist $2^\kappa = 2^{\lambda_0}$.

b) Ist κ Limeskardinalzahl und existiert kein $\lambda_0 < \kappa$ mit $2^\lambda = 2^{\lambda_0}$ für $\lambda_0 \leq \lambda < \kappa$, so ist $2^\kappa = \mu^{cf(\mu)}$ mit $\mu := 2^{<\kappa}$.

Beweis. a) Da $\lambda_0, cf(\kappa) < \kappa$, sei oBdA $cf(\kappa) \leq \lambda_0$ (sonst vergrößere man λ_0). Nach Voraussetzung ist $2^{<\kappa} = 2^{\lambda_0}$. Also nach 15.1

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = (2^{\lambda_0})^{cf(\kappa)} = 2^{\lambda_0 \cdot cf(\kappa)} = 2^{\lambda_0}.$$

b) Nach Voraussetzung ist die Folge $(2^\lambda \mid \lambda < \kappa)$ in $\mu = \sup\limits_{\lambda<\kappa} 2^\lambda$ kofinal; nach 13.1. c) ist $cf\,\mu = cf\,\kappa$. Nach 15.1 ist $2^\kappa = \mu^{cf\,\kappa} = \mu^{cf\,\mu}$. $\blacksquare$

<u>Bem</u> Sei $\kappa < cf(\lambda)$ und $f : \kappa \to \lambda$. Dann ist $rb\,f$ nicht kofinal in λ, da $|rb\,f| \leq \kappa < cf(\lambda)$. Es gibt also eine Ordinalzahl $\alpha < \lambda$ mit $f(x) < \alpha$ für alle $x \in \kappa$, d.h. $f : \kappa \to \alpha \subseteq \lambda$. Hieraus folgt

$$^\kappa\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} {}^\kappa\alpha$$

und (1) $$\lambda^\kappa = \sum_{\alpha<\lambda} |\alpha|^\kappa,$$

da $\lambda^\kappa = |\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} {}^\kappa\alpha| \leq \sum\limits_{\alpha<\lambda} |\alpha|^\kappa = \lambda \cdot \sup\limits_{\alpha<\lambda} |\alpha|^\kappa \leq \lambda^\kappa \cdot \lambda^\kappa = \lambda^\kappa$.

15.3. Lemma (Hausdorffsche Rekurrenzformel) Für unendliche Kardinalzahlen κ, μ ist $(\mu^+)^\kappa = \mu^\kappa \cdot \mu^+$.

Beweis. Für $\kappa < cf(\mu^+) = \mu^+$ setze man in (1) $\lambda := \mu^+$. Für $\mu^+ \leq \kappa$ ist nach 12.5 $(\mu^+)^\kappa = 2^\kappa$, $\mu^\kappa = 2^\kappa > \kappa \geq \mu^+$, also $\mu^\kappa \cdot \mu^+ = 2^\kappa$. ∎

15.4. Lemma λ sei Limeskardinalzahl und $cf(\lambda) \leq \kappa$. Dann ist

$$\lambda^\kappa = (\sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa)^{cf(\lambda)}.$$

Beweis. Sei $\lambda = \sum_{i<cf(\lambda)}^! \lambda_i$ und $2 \leq \lambda_i < \lambda$ für $i < cf(\lambda)$. Es gilt nach 14.2

$$\lambda^\kappa \leq (\prod_{i<cf(\lambda)} \lambda_i)^\kappa = \prod_{i<cf(\lambda)} \lambda_i^\kappa \leq \prod_{i<cf(\lambda)} (\sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa) = (\sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa)^{cf(\lambda)}$$

$$\leq (\lambda^\kappa)^{cf(\lambda)} = \lambda^\kappa. \ ∎$$

15.5. Satz (Induktive Berechnung von λ^κ) κ, λ seien unendliche Kardinalzahlen.

(i) Ist $\lambda \leq \kappa$, so $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.

(ii) Existiert $\mu < \lambda$ mit $\lambda \leq \mu^\kappa$, so $\lambda^\kappa = \mu^\kappa$.

(iii) Ist $\kappa < \lambda$ und $\mu^\kappa < \lambda$ für alle $\mu < \lambda$ und $\kappa < cf(\lambda)$, so $\lambda^\kappa = \lambda$.

(iv) Ist $\kappa < \lambda$ und $\mu^\kappa < \lambda$ für alle $\mu < \lambda$ und $cf(\lambda) \leq \kappa$, so $\lambda^\kappa = \lambda^{cf(\lambda)}$.

Beweis. (i) nach 12.5.

(ii) $\mu^\kappa \leq \lambda^\kappa \leq (\mu^\kappa)^\kappa = \mu^\kappa$.

(iii) Falls λ Nachfolgerkardinalzahl, etwa $\lambda = \mu^+$, benutze man 15.3 (denn $\mu < \lambda$).

Sei λ Limeskardinalzahl. Nach Voraussetzung ist $\sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa = \lambda$. Nach der Bemerkung vor 15.3 gilt $\lambda \leq \lambda^\kappa = \sum^! |\alpha|^\kappa = \lambda \cdot \lambda = \lambda$.

(iv) Es ist wieder $\lambda = \sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa$. Wegen $cf(\lambda) \leq \kappa < \lambda$ ist λ Limeskardinalzahl. Nach 15.4 ist $\lambda^\kappa = \lambda^{cf(\lambda)}$. ∎

15.6. Folgerung Für unendliche κ, λ ist $\lambda^\kappa = 2^\kappa$ oder $\lambda^\kappa = \lambda$ oder es existiert $\nu \in Card$ mit $cf\,\nu \leq \kappa < \nu \leq \lambda$ und $\lambda^\kappa = \nu^{cf(\nu)}$.

Beweis. In 15.5 bilden die Voraussetzungen von (i) bis (iv) eine vollständige Fallunterscheidung. Sei $\lambda^\kappa \neq 2^\kappa$ und $\lambda^\kappa \neq \lambda$, d. h. (i) und (iii) treten nicht ein. Sei

$$\nu := \min\{\alpha \in Card \setminus \omega \mid \lambda^\kappa \leq \alpha^\kappa\},$$

also $\nu \leq \lambda$ und daher $\nu^\kappa \leq \lambda^\kappa$, d. h. $\nu^\kappa = \lambda^\kappa$. Für $\mu < \nu$ ist

$\mu^\kappa < \nu \leq \lambda$, denn andernfalls wäre $\nu \leq \mu^\kappa$ und $\lambda^\kappa = \nu^\kappa \leq (\mu^\kappa)^\kappa = \mu^\kappa$, obwohl $\mu < \nu$. Es ist $\kappa < \nu$, denn sonst wäre $\nu \leq \kappa$ und $\lambda^\kappa = \nu^\kappa = 2^\kappa$. Weiter ist $cf(\nu) \leq \kappa$: wäre $\kappa < cf(\nu)$, so nach der Bemerkung vor 15.3 $\lambda^\kappa = \nu^\kappa = \sum_{\alpha<\nu} |\alpha|^\kappa \leq \lambda \cdot \nu = \lambda$ und $\lambda^\kappa = \lambda$. Auf κ, ν (statt κ, λ) wendet man nun (iv) von 15.5 an und erhält $\lambda^\kappa = \nu^\kappa = \nu^{cf(\nu)}$. ∎

15.7. Folgerung Unter Voraussetzung von GCH gilt für unendliches κ, λ:

$$\lambda^\kappa = \begin{cases} \lambda & \text{für } \kappa < cf(\lambda) \\ \lambda^+ & \text{für } cf(\lambda) \leq \kappa \leq \lambda \\ \kappa^+ & \text{für } \lambda \leq \kappa. \end{cases}$$

Beweis. Für $\lambda \leq \kappa$ ist nach 15.5.(i) $\lambda^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$. – Für beliebiges unendliches ν gilt $\nu^+ \leq \nu^{cf(\nu)}$ nach 14.5.b), und wegen GCH $\nu^{cf(\nu)} \leq \nu^\nu = 2^\nu = \nu^+$, also $\nu^{cf(\nu)} = \nu^+$. Daraus folgt für $cf(\lambda) \leq \kappa \leq \lambda$ $\lambda^+ = \lambda^{cf(\lambda)} \leq \lambda^\kappa \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$. – Für $\kappa < cf(\lambda)$ ist

$$\lambda \leq \lambda^\kappa = \sum_{\alpha \in \lambda} |\alpha|^\kappa = \lambda \cdot \sup_{\alpha \in \lambda} |\alpha|^\kappa \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda,$$

denn für $\alpha \in \lambda$ ist $\mu := \max(\kappa, |\alpha|) < \lambda$ und $|\alpha|^\kappa \leq \mu^\mu = 2^\mu = \mu^+ \leq \lambda$. ∎

16. Aus GCH folgt AC

Wir werden zeigen, daß sich in ZF, ohne Benutzung des Auswahlaxioms AC, aus GCH AC beweisen läßt (Satz 16.4). Zunächst einige Definitionen bzw. Wiederholungen. Da AC hier nicht benutzt werden darf, kann man nicht für jede Menge A die Kardinalzahl $|A|$ von A (= das $\kappa \in$ Card mit $A \approx \kappa$) bilden und muß mit Mächtigkeiten von Mengen vorsichtig umgehen.

Def A, B seien Mengen. Dann bedeute:

$A \approx B$: es gibt ein bijektives $f: A \to B$,

$A \leq B$: es gibt ein injektives $f: A \to B$.

$A + B$ sei die Vereinigung von zwei disjunkten Mengen A', B' mit $A \approx A'$, $B \approx B'$, etwa $A' := A \times \{0\}$, $B' := B \times \{1\}$. $2A$ sei $A + A$. $A < B$ bedeute: $A \leq B$, aber $A \not\approx B$.