14. Summen und Produkte von unendlich vielen Kardinalzahlen

Wir verallgemeinern in diesem Kapitel Summen und Produkte von Kardinalzahlen auf unendliche Indexmengen und weisen einige Rechengesetze nach. Insbesondere erhalten wir in 14.5.a) eine weitere Aussage über das Verhalten von 2^κ gegenüber κ. Zusammen mit den Ergebnissen von Kapitel 13 wird uns dies in Kapitel 15 in die Lage versetzen, einiges mehr über die Potenzfunktion $(\lambda,\kappa)\mapsto\lambda^\kappa$ zu sagen.

<u>Def</u> I sei eine Menge und $(X_i \mid i\in I)$ eine Familie von Mengen. Es sei

$$\prod_{i\in I} X_i := \{c \mid c: I\to \bigcup_{i\in I} X_i \text{ , und } c(i)\in X_i \text{ für } i\in I\}$$
$$= \{c \mid c \text{ ist Auswahlfunktion für } (X_i)_{i\in I}\}.$$

das „cartesische Produkt" der Mengen X_i. (Das Auswahlaxiom besagte, daß $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$, falls $X_i\neq\emptyset$ für $i\in I$).

Sei $(\kappa_i)_{i\in I}$ eine Familie von Kardinalzahlen; für $i\in I$ sei X_i Menge mit $|X_i|=\kappa_i$; in a) seien die X_i paarweise disjunkt. Man definiert:

a) $\sum_{i\in I}\kappa_i := |\bigcup_{i\in I} X_i|$ falls $X_i\cap X_j=\emptyset$ für $i\neq j$

b) $\prod_{i\in I}\kappa_i := |\prod_{i\in I} X_i|$.

<u>Bem</u> 1. Wie in Kapitel 12 zeigt man, daß diese Definitionen von der Wahl der Mengen X_i mit $|X_i|=\kappa_i$ unabhängig sind (dabei geht AC ein).

2. Ist $|I|=\lambda$ und $\kappa_i:=\kappa$ für $i\in I$, so

$$\sum_{i\in I}\kappa := \sum_{i\in I}\kappa_i = \lambda\cdot\kappa$$
$$\prod_{i\in I}\kappa := \prod_{i\in I}\kappa_i = \kappa^\lambda.$$

3. Analog zu Kapitel 12 gelten Rechengesetze wie

$$\left.\begin{array}{ll}\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j}\kappa_i\right) & \text{falls } I=\dot{\bigcup}_{j\in J} I_j \\ \prod_{i\in I}\kappa_i = \prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in I_j}\kappa_i\right) & \text{"}\end{array}\right\}\ \text{Assoziativgesetz}$$

$$\lambda\cdot\left(\sum_{i\in I}\kappa_i\right) = \sum_{i\in I}\lambda\cdot\kappa_i \quad \text{für } \lambda\in Card$$

$$\left(\prod_{i\in I}\kappa_i\right)^\lambda = \prod_{i\in I}\kappa_i^\lambda \quad \text{für } \lambda_i\in Card$$

$$\kappa^{\sum_{i\in I}\lambda_i} = \prod_{i\in I}\kappa^{\lambda_i} \quad \text{"}$$

$$\kappa_i\leq\kappa_i' \text{ für } i\in I \Rightarrow \sum_{i\in I}\kappa_i\leq\sum_{i\in I}\kappa_i',\ \prod_{i\in I}\kappa_i\leq\prod_{i\in I}\kappa_i'.$$

14.1. Lemma I sei unendliche Menge und $\kappa_i > 0$ für $i \in I$. Dann ist

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sup_{i\in I} \kappa_i \cdot |I| .$$

Beweis. Setze $\sigma := \sum_{i\in I} \kappa_i$, $\kappa := \sup_{i\in I} \kappa_i$. Wegen $\kappa_i \le \kappa$ gilt $\sigma \le \sum_{i\in I} \kappa = \kappa \cdot |I|$. Wegen $1 \le \kappa_i$ gilt $|I| = \sum_{i\in I} 1 \le \sum_{i\in I} \kappa_i = \sigma$, ferner $\kappa_i \le \sum_{i\in I} \kappa_i = \sigma$, also $\kappa \le \sigma$. Damit ist $\kappa \cdot |I| = \max(\kappa, |I|) \le \sigma$. ∎

Folgerung Ist $|I| \le \kappa = \sup_{i\in I} \kappa_i$, so gilt $\sum_{i\in I} \kappa_i = \sup_{i\in I} \kappa_i$ (für $\kappa_i > 0$). – Setzt man $\lambda := cf(\kappa)$ und wählt $(\kappa_i)_{i<\lambda}$ so, daß $\sup_{i<\lambda} \kappa_i = \kappa$ und $\kappa_i < \kappa$, so folgt $\kappa = \sum_{i<\lambda} \kappa_i$. D.h. κ ist genau dann singulär, wenn es $\lambda < \kappa$ und $(\kappa_i)_{i<\lambda}$ mit $\kappa_i < \kappa$ gibt, so daß $\kappa = \sum_{i\in\lambda} \kappa_i$.

14.2. Lemma Für $i \in I$ sei $2 \le \kappa_i$. Dann ist $\sum_{i\in I} \kappa_i \le \prod_{i\in I} \kappa_i$.

Beweis. Durch Fallunterscheidung.

$|I| = 0$: es ist $I = \emptyset$, $\sum_{i\in I} \kappa_i = 0$, $\prod_{i\in I} \kappa_i = 1$.

$|I| = 1$: sei etwa $I = \{i_0\}$. Es ist $\sum_{i\in I} \kappa_i = \kappa_{i_0} = \prod_{i\in I} \kappa_i$.

$|I| = 2$: sei oBdA $I = \{1,2\}$. Falls $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}$, so $\kappa_1 = n+2$, $\kappa_2 = m+2$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\kappa_1 + \kappa_2 = n+m+4 \le n\cdot m + 2n + 2m + 4 = \kappa_1 \cdot \kappa_2 .$$

Falls $\kappa_1 \ge \omega$ oder $\kappa_2 \ge \omega$, ist $\kappa_1 + \kappa_2 = \max(\kappa_1, \kappa_2) = \kappa_1 \cdot \kappa_2$.

$2 < |I| < \omega$: Induktion über $|I|$, wobei der Fall $|I| = 2$ benutzt wird.

$|I| \ge \omega$: es ist $|I| < 2^{|I|} = \prod_{i\in I} 2 \le \prod_{i\in I} \kappa_i$. Sei nun $(X_i)_{i\in I}$ Familie von paarweise disjunkten Mengen mit $|X_i| = \kappa_i$. Wir geben ein injektives

$$\varphi : \bigcup_{i\in I} X_i \longrightarrow I \times \prod_{i\in I} X_i$$

an, was $\sum_{i\in I} \kappa_i \le |I| \cdot \prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{i\in I} \kappa_i$ zeigt. Für $x \in \bigcup_{i\in I} X_i$ sei $\varphi(x) := (i, c)$ mit: $i \in I$ so, daß $x \in X_i$; $c \in \prod_{i\in I} X_i$ so, daß $c(i) = x$. φ ist injektiv, denn aus $\varphi(x) = \varphi(y) = (i, c)$ folgt $x = c(i) = y$. ∎

14.3. Lemma λ sei unendliche Kardinalzahl und $0 < \kappa_i \le \kappa_j$ für $i \le j < \lambda$. Dann ist

$$\prod_{i<\lambda} \kappa_i = (\sup_{i\in I} \kappa_i)^{\lambda} .$$

Beweis. Setze $\kappa := \sup_{i<\lambda} \kappa_i$. Es ist $\prod_{i<\lambda} \kappa_i \le \prod_{i\in\lambda} \kappa = \kappa^{\lambda}$. Sei $\varphi : \lambda \times \lambda \to \lambda$ bijektiv (etwa φ die Einschränkung der Funktion K von

Kapitel 12 auf λ). Für $j\in\lambda$ sei A_j das Bild von $\{j\}\times\lambda$ unter φ. D. h. $\lambda = \bigcup_{j\in\lambda} A_j$, und $|A_j| = \lambda$ für $j\in\lambda$. Für $i\in A_j$ ist $\kappa_i \leq \prod_{i\in A_j}\kappa_i$. Da $A_j \subseteq \lambda$ kofinal (wegen $|A_j|=\lambda$), ist $\kappa = \sup_{i\in A_j}\kappa_i \leq \prod_{i\in A_j}\kappa_i$. Es folgt

$$\kappa^\lambda = \prod_{j\in\lambda}\kappa \leq \prod_{j\in\lambda}\prod_{i\in A_j}\kappa_i = \prod_{i<\lambda}\kappa_i. \blacksquare$$

<u>14.4. Satz</u> (König) Ist $\kappa_i < \lambda_i$ für jedes $i\in I$, so $\sum_{i\in I}\kappa_i < \prod_{i\in I}\lambda_i$.

Beweis. Für $i\in I$ sei X_i Menge mit $|X_i| = \lambda_i$; setze $X := \prod_{i\in I} X_i$. Wäre $\sum_{i\in I}\kappa_i \geq \prod_{i\in I}\lambda_i = |X|$, so existierten Teilmengen A_i von X mit $|A_i| \leq \kappa_i$ und $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Für $i\in I$ sei

$$P_i := \{c(i) \mid c\in A_i\}$$

die „i-te Projektion von A_i"; also $P_i \subseteq X_i$. Wegen $|X_i| = \lambda_i > \kappa_i \geq |A_i| \geq |P_i|$ existiert $x_i \in X_i \setminus P_i$. $c := (x_i)_{i\in I}$ ist eine Funktion in X, die in keinem A_i liegt, denn aus $c\in A_i$ folgte $c(i) = x_i \in P_i$! $\blacksquare$

<u>14.5. Korollar</u> a) Für $2\leq\lambda$ und $\omega\leq\kappa$ ist $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda^\kappa)$, insbesondere $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa) \leq 2^\kappa$.

b) Für $\kappa\geq\omega$ ist $\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa} > \kappa$.

Beweis. a) Sei $\mu\leq\kappa$ und $\kappa_i < \lambda^\kappa$ für $i<\mu$; wegen der Folgerung von 14.1 reicht es zu zeigen, daß $\sum_{i<\mu}\kappa_i < \lambda^\kappa$. Aber nach 14.4 ist

$$\sum_{i<\mu}\kappa_i < \prod_{i<\mu}(\lambda^\kappa) = (\lambda^\kappa)^\mu = \lambda^{\kappa\cdot\mu} = \lambda^\kappa.$$

b) Wähle $\kappa_i < \kappa$ für $i<\mathrm{cf}(\kappa)$ mit $\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_i$. Es ist

$$\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}\,\kappa}\kappa_i < \prod_{i<\mathrm{cf}\,\kappa}\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}. \blacksquare$$

<u>15. Potenzen von Kardinalzahlen (Fortsetzung)</u>

Über die sog. Kontinuumfunktion von $\mathrm{Card}\setminus\omega$ nach $\mathrm{Card}\setminus\omega$, die jedem κ die Potenz 2^κ zuordnet, wissen wir bisher:

a) $\kappa\leq\lambda \Rightarrow 2^\kappa \leq 2^\lambda$

b) $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa)$ $(\leq 2^\kappa)$ nach 14.5, a).

Für reguläre Werte von κ gibt es, wie Easton gezeigt hat, keine weiteren Beschränkungen. In 15.1 und 15.2 ziehen wir einige Folgerungen aus a), b) über die Kontinuumfunktion. Im Rest des Kapitels werden Aussagen