Für die Berechnung von κ^λ für $\kappa \geq 2, \lambda \geq \omega$ hat man keine 12.4 entsprechenden Formeln. Man weiß nur: ist x Menge mit $|x| = \kappa$, so $|P(x)| = |{}^x 2| = 2^\kappa$ und $\kappa = |x| < |P(x)| = 2^\kappa$ nach 11.1. D. h.

$$\kappa < 2^\kappa$$

für jede Kardinalzahl κ. In Kapitel 14 werden wir eine weitere Ungleichung für 2^κ gegenüber κ herleiten. Da $\kappa < 2^\kappa$, ist für unendliches κ $\kappa^+ \leq 2^\kappa$.
Die folgende Aussage wird als „Allgemeine Kontinuumhypothese" (GCH = "generalized continuum hypothesis") bezeichnet:

(GCH) Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist $2^\kappa = \kappa^+$ – d. h. für jedes $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ist $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Die spezielle Kontinuumhypothese ist:

(CH) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Weder GCH (bzw. CH) noch die Negation von GCH (bzw. CH) lassen sich aus den ZF-Axiomen beweisen. Man kann zeigen: falls ZFC widerspruchsfrei ist, d. h. falls es überhaupt Modelle von ZFC gibt, so gibt es

a) Modelle von ZFC, in denen GCH gilt (Gödel)
b) Modelle von ZFC, in denen GCH auf vorgeschriebene Weise zerstört ist – z. B. Modelle, in denen $2^\kappa = \kappa^{+++}$ für jedes $\kappa \geq \omega$, das regulär ist (siehe Kapitel 13) (Cohen, Easton).

Die Frage, wie weit GCH für singuläres κ (siehe Kapitel 13) zerstört werden kann, wird uns in Kapitel 17 beschäftigen.

<u>12.5. Folgerung</u> Sind κ, μ Kardinalzahlen mit $2 \leq \mu \leq 2^\kappa$, $\omega \leq \kappa$, so ist $\mu^\kappa = 2^\kappa$. Insbesondere ist $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.

Beweis. $2^\kappa \leq \mu^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$ nach 12.1, 12.3. ∎

13. Reguläre und singuläre Kardinalzahlen

<u>Def + Wied</u> Lim sei die Klasse aller Limesordinalzahlen. Ist $\alpha \in \mathrm{Ord}$ und $M \subseteq \alpha$, so sei der Ordnungstyp von M die Ordinalzahl $\beta = \mathrm{ot}(M)$ mit $(M, <) \cong (\beta, \in)$; man kann dann M in der Form $M = \{m_\xi \mid \xi < \beta\}$ mit $\xi < \xi' < \beta \Rightarrow m_\xi < m_{\xi'}$ schreiben ($m_\xi := f(\xi)$, wobei $f: (\beta, \in) \xrightarrow{\cong} (M, <)$). $(m_\xi \mid \xi \in \beta)$ heißt die monotone Aufzählung von M. – Ist $\alpha \in \mathrm{Lim}$ und $M \subseteq \alpha$, so heißt M kofinal in α, falls

$$\sup M = \alpha, \text{ d. h. es ex. kein } \xi < \alpha \text{ mit } m \leq \xi \text{ für } m \in M$$
$$\text{d. h. zu jedem } \xi < \alpha \text{ ex. } m \in M \text{ mit } \xi < m.$$

Sei $\lambda \in \mathrm{Ord}$, $\alpha \in \mathrm{Lim}$ und $f: \lambda \to \alpha$. Statt f schreiben wir auch $(a_\xi)_{\xi < \lambda}$, wobei $a_\xi = f(\xi)$; f heißt eine Folge vom Typ λ.

f heißt kofinal, falls f monoton und $\mathrm{rbf} \subseteq \alpha$ kofinal in α ist. Offenbar muß dann $\lambda \in Lim$ sein. Es sei

$$cf(\alpha) := \min\{\lambda \in Ord \mid \text{es ex. } f : \lambda \to \alpha \text{ kofinal}\}$$

die „Kofinalität von α".

<u>13.1. Lemma</u> a) Für jede Limesordinalzahl α ist $cf(\alpha) \leq |\alpha| \leq \alpha$.
b) Ist $M \subseteq \alpha$ kofinal, so ist $ot(M) \geq cf(\alpha)$.
c) Ist $(\beta_\nu)_{\nu<\gamma}$ eine kofinale Folge in α, so $cf(\gamma) = cf(\alpha)$.
d) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

Beweis. a) $|\alpha| \leq \alpha$ gilt für jede Ordinalzahl α. $cf(\alpha) \leq |\alpha| =: \kappa$ zeigen wir durch Angabe einer kofinalen Abbildung $f : \lambda \to \alpha$ mit $\lambda \leq \kappa$ – dann gilt $cf(\alpha) \leq \lambda \leq \kappa$. Da $\kappa = |\alpha|$, sei $\alpha = \{a_\xi \mid \xi < \kappa\}$.
Sei $\nu < \kappa$, und für $\eta < \nu$ sei $f(\eta)$ definiert mit

$$\eta < \eta' < \nu \implies f(\eta) < f(\eta') < \alpha.$$

Sei

$$f(\nu) := \begin{cases} \max(\sup\{f(\eta) \mid \eta < \nu\}, a_\nu) + 1, \\ \qquad \text{falls } \sup\{f(\eta) \mid \eta < \nu\} < \alpha \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

Ist $\lambda < \kappa$ minimal, so daß $f(\lambda)$ undefiniert, so ist $\lambda \in Lim$ und $(f(\eta) \mid \eta < \lambda)$ kofinal in α. Sonst ist f auf ganz κ definiert und ebenfalls kofinal, denn ist $x \in \alpha$, etwa $x = a_\xi$ mit $\xi < \kappa$, so $x < f(\xi)$.
b) Ist $f = (m_\xi \mid \xi < \beta)$ die monotone Aufzählung von M, so ist $f : \beta \to \alpha$ kofinal, also $\beta = ot(M) \geq cf(\alpha)$.
c) Wir konstruieren kofinale Abbildungen $f : cf(\gamma) \to \alpha$ und $g : cf(\alpha) \to \gamma$; dann ist $cf(\alpha) \leq cf(\gamma)$ und $cf(\gamma) \leq cf(\alpha)$.
Sei $h := (\beta_\nu)_{\nu<\gamma}$; wähle $k : cf(\gamma) \to \gamma$ kofinal. Damit ist $f := h \circ k : cf(\gamma) \to \alpha$ kofinal. – Wähle $l : cf(\alpha) \to \alpha$ kofinal; setzt man für $\xi \in cf(\alpha)$

$$g(\xi) := \min\{\nu < \gamma \mid l(\xi) \leq \beta_\nu\}$$

(ein solches $\nu \in \gamma$ existiert, da $(\beta_\nu)_{\nu<\gamma}$ in α kofinal), so ist g monoton und auch kofinal: sei nämlich $\nu \in \gamma$. Wäre $g(\xi) \leq \nu$ für alle $\xi \in cf(\alpha)$, so $l(\xi) \leq \beta_{g(\xi)} \leq \beta_\nu$ für alle $\xi \in cf(\alpha)$; Widerspruch zur Wahl von l.
d) Wähle in c) $\gamma = cf\,\alpha$ und $(\beta_\nu)_{\nu < cf(\alpha)}$ kofinal in α! ∎

<u>Def</u> Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt regulär, falls $cf(\kappa) = \kappa$, sonst singulär (d. h. falls $cf(\kappa) < \kappa$).

<u>13.2. Satz</u> Für jede Limesordinalzahl α ist $cf(\alpha)$ eine reguläre Kardinalzahl.
Beweis. Zunächst gilt: ist $\lambda \in Lim$ und $cf(\lambda) = \lambda$, so $\lambda \in Card$. Denn sonst ist $cf(\lambda) \leq |\lambda| < \lambda$ nach 13.1.a), $cf(\lambda) \neq \lambda$! – Wegen $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$ nach 13.1.d) ist $cf(\alpha)$ also Kardinalzahl und regulär. ∎

Zusatz zu 13.1.

$f: \lambda \to \alpha$ heiße stetig, falls
$$f(\xi) = \sup_{\nu<\xi} f(\nu) \quad \text{für } \xi \in \lambda \cap Lim;$$
Normalfunktion, falls f stetig und streng monoton ist.

13.1, e) Es gibt eine kofinale Normalfunktion $f: cf\,\alpha \to \alpha$.
Beweis. Sei $\lambda := cf\,\alpha$ und $\{\beta_\nu \mid \nu<\lambda\}$ eine kofinale Teilmenge von α. Setze
$$f(0) := 0.$$
Sei $\xi < \lambda$ Limeszahl und $f(\nu)$ für $\nu < \xi$ definiert. Wegen $\xi < \lambda = cf\,\alpha$ kann $\{f(\nu) \mid \nu < \xi\}$ nicht kofinal in α sein. Daher ist $\sup_{\nu<\xi} f(\nu) \in \alpha$, und man setzt
$$f(\xi) := \sup_{\nu<\xi} f(\nu).$$
Ist $f(\nu)$ definiert, so sei
$$f(\nu+1) := \max(f(\nu), \beta_\nu) + 1.$$
Damit wird f stetig, streng monoton und wegen $\beta_\nu < f(\nu+1)$ auch kofinal. ∎

Bsp Ist $\alpha \in \mathrm{Ord}$, so sei für $n \in \mathbb{N}$ $\alpha + n \in \mathrm{Ord}$ definiert durch $\alpha + 0 := \alpha$ $\quad \alpha + (n+1) := (\alpha + n) + 1$; es sei $\alpha + \omega := \sup\{\alpha + n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Es ist also $\aleph_{\alpha+n} = (\aleph_\alpha)^{\overbrace{+ \cdots +}^{n\text{-mal}}}$, $\aleph_{\alpha+\omega} = \sup\{\aleph_{\alpha+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Es ist $\aleph_0 \leq \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+\omega}$ und $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\omega}) = \aleph_0$, da $\{\aleph_{\alpha+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ kofinal in $\aleph_{\alpha+\omega}$ ist. – Insbesondere gibt es zu jeder Kardinalzahl κ ein singuläres λ mit $\kappa < \lambda$.

13.3. Satz κ sei eine unendliche Kardinalzahl. Dann ist $\mathrm{cf}(\kappa)$ die kleinste Kardinalzahl λ, so daß eine Folge $(S_\xi)_{\xi<\lambda}$ von Teilmengen von κ existiert mit $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi$, $|S_\xi| < \kappa$ für $\xi < \lambda$.

Beweis. Sei $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ kofinal; setze $S_\xi := f(\xi)$ für $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$; also $f(\xi) \in \kappa$, $f(\xi) \subseteq \kappa$, $S_\xi \subseteq \kappa$. Für $\xi \in \mathrm{cf}(\kappa)$ ist $|S_\xi| < \kappa$, denn $f(\xi)$ ist Ordinalzahl und echt kleiner als κ.
Sei nun λ eine Kardinalzahl, $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, $S_\xi \subseteq \kappa$ für $\xi < \lambda$ und $|S_\xi| =: \kappa_\xi < \kappa$; wir zeigen, daß $|\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi| < \kappa$ und daher $\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi \neq \kappa$ ist. Für $\xi < \lambda$ sei $b_\xi : S_\xi \to \kappa_\xi$ bijektiv. Da $\kappa_\xi < \kappa$ für $\xi < \lambda$ und $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, ist

$$\sigma := \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \lambda\} < \kappa.$$

Wir geben ein injektives $\varphi : \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi \to \lambda \times \sigma$ an; dann folgt $|\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi| \leq \lambda \cdot \sigma = \max(\lambda, \sigma) < \kappa$.
Sei $\alpha \in \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi$. Setze $\varphi(\alpha) := (\xi, \eta)$ mit $\xi := \min\{\zeta < \lambda \mid \alpha \in S_\zeta\}$ und $\eta := b_\xi(\alpha)$ für dieses ξ (wegen $\kappa_\xi \leq \sigma$ ist $b_\xi : S_\xi \to \kappa_\xi \leq \sigma$). Ist $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha') = (\xi, \eta)$, so $\eta = b_\xi(\alpha) = b_\xi(\alpha')$ und $\alpha = \alpha'$, da b_ξ injektiv. Also ist φ injektiv. ∎

Folgerung Folgende Eigenschaften sind für eine unendliche Kardinalzahl κ äquivalent zur Singularität von κ:
a) es gibt $\lambda < \kappa$ und $f : \lambda \to \kappa$ kofinal
b) es gibt $M \subseteq \kappa$ mit $|M| < \kappa$ und M kofinal
c) es gibt $\lambda < \kappa$ und $(S_\xi)_{\xi<\lambda}$ mit $S_\xi \subseteq \kappa$, $|S_\xi| < \kappa$ und $\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi = \kappa$.

Folgerung Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist κ^+ regulär. Denn ist $\lambda < \kappa^+$, $S_\xi \subseteq \kappa^+$ mit $|S_\xi| < \kappa^+$ für $\xi < \lambda$, so ist $\lambda \leq \kappa$, $|S_\xi| \leq \kappa$, und wie im Beweis von 13.3 folgt $|\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi| \leq \lambda \cdot \kappa = \kappa < \kappa^+$.
Auch $\aleph_0$ ist regulär – denn ist $n < \aleph_0$, $f : n \to \aleph_0$, so ist $\sup_{m<n} f(m) < \aleph_0$ (siehe Beweis von 8.3, 2. Fall).

Bem Eine Kardinalzahl κ heißt

schwach unerreichbar, falls $\omega < \kappa$, κ regulär, κ Limeskardinalzahl

stark " " , falls " , " , $\lambda < \kappa \Rightarrow 2^{\lambda} < \kappa$.

Jedes stark unerreichbare κ ist also schwach unerreichbar; setzt man GCH voraus, so gilt auch die Umkehrung. Die Existenz einer (schwach) unerreichbaren Kardinalzahl ist aber in ZFC nicht beweisbar.

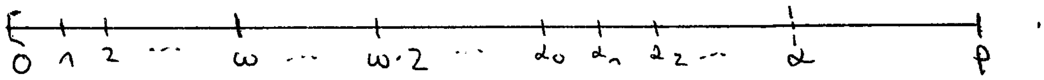
Bsp Sei ξ eine beliebige Ordinalzahl und

$$X := \{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \alpha < \xi\};$$

also $X = \xi$. Durch Angabe von Umgebungsbasen für die Punkte von X definieren wir auf X eine Topologie, die sog. Ordnungstopologie: ist $\alpha \in X$ keine Limesordinalzahl, so sei $\{\{\alpha\}\}$ Basis für die Umgebungen von α, d.h. α sei isolierter Punkt in X. Ist $\lambda \in X$ Limeszahl, so sei

$$\{U_\alpha(\lambda) \mid \alpha < \lambda\} \quad \text{mit } U_\alpha(\lambda) := \{x \in X \mid \alpha \lneqq x \leq \lambda\}$$

Umgebungsbasis für λ. – Mit dieser Topologie wird X Hausdorffraum; X ist genau dann kompakt, wenn X ein letztes Element hat, d.h. wenn ξ keine Limeszahl ist. – Für den Rest des Bsps sei nun $\xi := \aleph_1 + 1$, d.h. $X = \{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \alpha \leq \aleph_1\}$ ist kompakter T_2-Raum. $p := \aleph_1$ ist der „letzte" Punkt von X:



Da $\aleph_1 = \omega^+$ regulär, ist für jede Folge $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ $\sup_{n\in\omega} \alpha_n =: \alpha < p$.

Daraus folgt:

1. Es gibt keine abzählbare Folge $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ in $X \setminus \{p\}$, die gegen p konvergiert – denn setze $\alpha := \sup_{n\in\omega} \alpha_n$; $U_{\alpha+1}(p)$ ist Umgebung von p, die kein α_n enthält.
2. p hat keine abzählbare Umgebungsbasis (folgt aus 1.).
3. Ist $f: X \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es eine Umgebung U von p, auf der f konstant ist: da f stetig im Punkt p, wähle man zu $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n < p$ mit

$$x \in U_{\alpha_n}(p) \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{1}{n+1}.$$

Sei $\alpha := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Für $x \in U := U_\alpha(p)$ ist $f(x) = f(p)$: denn für $n \in \mathbb{N}$ ist (wegen $\alpha_n \leq \alpha$, $U_\alpha(p) \subseteq U_{\alpha_n}(p)$) $x \in U_{\alpha_n}(p)$, $|f(x) - f(p)| < \frac{1}{n+1}$. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, muß $f(x) = f(p)$ sein.