12. Kardinalzahlarithmetik

In diesem Kapitel definieren wir für $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$ $\kappa+\lambda$, $\kappa\cdot\lambda$, $\kappa^\lambda \in \mathrm{Card}$. Diese Operationen auf Card stimmen, trotz gleicher Schreibweise, nicht mit den am Schluß von Kapitel 7 zitierten überein. Z.B. ist $\omega \underset{\mathrm{Card}}{+} \omega = \omega \underset{\mathrm{Card}}{\cdot} \omega = \omega$, aber $\omega \underset{\mathrm{Od}}{+} \omega$, $\omega \underset{\mathrm{Od}}{\cdot} \omega$ und ω sind paarweise verschieden. Wir weisen einige Rechengesetze für die Kardinalzahloperationen nach und zeigen, daß Summe und Produkt unendlicher Kardinalzahlen sich sehr einfach berechnen lassen. Für die Potenzfunktion $(\kappa,\lambda) \mapsto \kappa^\lambda$ gilt nichts derartiges.

Def κ, λ seien Kardinalzahlen, A und B Mengen mit $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$; in a) setze man noch $A \cap B = \emptyset$ voraus. Dann sei

a) $\kappa + \lambda := |A \cup B|$ wobei $A \cap B = \emptyset$

b) $\kappa \cdot \lambda := |A \times B|$

c) $\kappa^\lambda := |{}^B A| = |\{f \mid f: B \to A\}|$.

Bem Diese Definitionen sind insofern sinnvoll, als $|A \cup B|, \ldots$ von der Wahl der Mengen A, B nicht abhängen: seien nämlich A', B' Mengen mit $|A'| = \kappa$, $|B'| = \lambda$ und, für a), $A' \cap B' = \emptyset$. Dann ist $|A \cup B| = |A' \cup B'|$, $|A \times B| = |A' \times B'|$, $|{}^B A| = |{}^{B'}A'|$. Denn seien $g: A \to A'$, $h: B \to B'$ bijektiv; eine Bijektion

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[d, dashed, "\varphi(f)"] \\ A \arrow[r, "g"'] & A' \end{tikzcd} \qquad {}^B A \xrightarrow{\varphi} {}^{B'}A', \quad f \mapsto \varphi(f)$$

ist z.B. $\varphi(f) := g \circ f \circ h^{-1}$.

12.1. Lemma κ, λ, μ seien Kardinalzahlen.

a) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

b) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$, $(\kappa \cdot \lambda)\cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

c) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$

d) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

e) $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$

f) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

g) Ist $\kappa \le \kappa'$, $\lambda \le \lambda'$; κ', λ' Kardinalzahlen, so ist
$$\kappa + \lambda \le \kappa' + \lambda', \quad \kappa \cdot \lambda \le \kappa' \cdot \lambda', \quad \kappa^\lambda \le \kappa'^{\lambda'}.$$

Beweis. c) Seien A, B, C Mengen mit $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $|C| = \mu$ und $B \cap C = \emptyset$. Dann ist

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = |A \times (B \cup C)| = |A \times B \cup A \times C|$$
$$= |A \times B| + |A \times C|, \text{ da } A \times B \cap A \times C = \emptyset$$

$= \kappa\cdot\lambda + \kappa\cdot\mu .$

f) Sei wieder $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $|C| = \mu$. Es ist $(\kappa^\lambda)^\mu = |{}^C({}^B A)|$, $\kappa^{\lambda\cdot\mu} = |{}^{B\times C} A|$. Folgende Abbildung $\varphi : {}^C({}^B A) \to {}^{B\times C} A$ ist Bijektion:

$$
\begin{aligned}
{}^C({}^B A) &\xrightarrow{\ \varphi\ } {}^{B\times C} A \\
f &\longmapsto f' = \varphi(f) \\
& \qquad f'(b,c) := (f(c))\,(b)
\end{aligned}
$$

(denn für $c \in C$ ist $f(c) : B \to A$, $(f(c))(b) \in A$).

g) Sei $|A| = \kappa$, $|A'| = \kappa'$, $|B| = \lambda$, $|B'| = \lambda'$. Wegen $\kappa \le \kappa'$, $\lambda \le \lambda'$ wähle man $g : A \to A'$ injektiv und $h : B \to B'$ injektiv. Sei dann

$$
\begin{aligned}
{}^B A &\xrightarrow{\ \varphi\ } {}^{B'} A' \\
f &\longmapsto f' = \varphi(f),
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{ccc}
B & \overset{h}{\longmapsto} & B' \\
f\downarrow & & \downarrow f' \\
A & \underset{g}{\longmapsto} & A'
\end{array}
$$

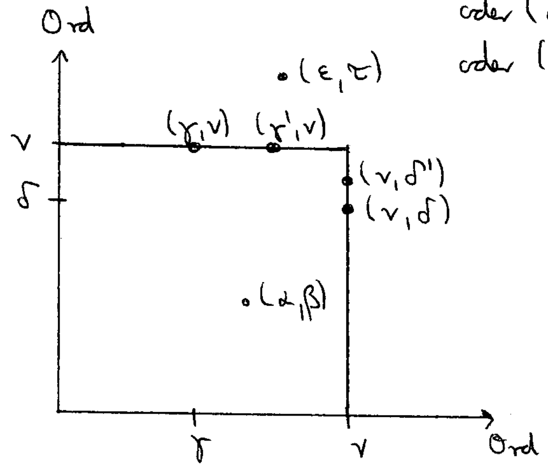
wobei $f' \restriction h[B] := g \circ f \circ h^{-1}$

$f'(b) := a_0$ für $b \in B' \setminus h[B]$

und a_0 ein festes Element von A' sei. – φ ist injektiv und damit $\kappa^\lambda = |{}^B A| \le |{}^{B'} A'| = \kappa'^{\lambda'}$. ∎

Def Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ sei $\max(\alpha,\beta)$ die größere der beiden Zahlen α, β (also, falls $\alpha = \beta$, $\max(\alpha,\beta) = \alpha$). – Wir definieren eine Relation $<$ auf $\mathrm{Ord}^2 = \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ durch

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\beta) < (\gamma,\delta) :\Longleftrightarrow\ & \max(\alpha,\beta) < \max(\gamma,\delta) \\
& \text{oder } (\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta) \text{ und } \alpha < \gamma) \\
& \text{oder } (\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta) \text{ und } \alpha = \gamma \\
& \qquad \text{und } \beta < \delta).
\end{aligned}
$$



Anschaulich: sei $\nu \in \mathrm{Ord}$;

$$
\begin{aligned}
M := \{(\gamma,\delta) \mid \max(\gamma,\delta) = \nu\} &= \{(\gamma,\nu) \mid \gamma \le \nu\} \\
&\quad \cup \{(\nu,\delta) \mid \delta \le \nu\}
\end{aligned}
$$

Für $\alpha, \beta < \nu$ ist $(\alpha,\beta) < x$ für jedes $x \in M$.

Für $\varepsilon > \nu$ oder $\tau > \nu$ ist $(\varepsilon,\tau) > x$ für jedes $x \in M$.

Für $\gamma < \gamma' < \nu$, $\delta < \delta' < \nu$ ist $(\gamma,\nu) < (\gamma',\nu)$, $(\nu,\delta) < (\nu,\delta')$.

12.2. Lemma $<$ ist eine Wohlordnung auf Ord^2.

Beweis. Offenbar ist $<$ irreflexiv; für $p,q \in \mathrm{Ord}^2$ gilt $p = q$ oder $p < q$ oder $q < p$. Sei $x = (\alpha,\beta) < y = (\gamma,\delta) < z = (\varepsilon,\tau)$. Ist $\max(\alpha,\beta) < \max(\gamma,\delta)$ oder $\max(\gamma,\delta) < \max(\varepsilon,\tau)$, so folgt $\max(\alpha,\beta) < \max(\varepsilon,\tau)$ und $x < z$. Sei also $\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta) = \max(\varepsilon,\tau)$. Ist $\alpha < \gamma$ oder $\gamma < \varepsilon$, so $\alpha < \varepsilon$ und $x < z$. Sei also $\alpha = \gamma < \varepsilon$. Da $x < y < z$, muß dann $\beta < \delta < \tau$ sein, und es ist $x < z$.

Sei $y = (\gamma,\delta) \in \mathrm{Ord}^2$. Mit $\nu := \max(\gamma,\delta) + 1$ gilt

$$_{<}y = \{x \in \mathrm{Ord}^2 \mid x < y\} \subseteq \nu \times \nu\,,$$

d.h. $_{<}y$ ist Menge.

Sei $M \subseteq \mathrm{Ord}^2$ nichtleere Menge. Setze

$$\mu_0 := \min\{\max(\alpha,\beta) \mid (\alpha,\beta) \in M\}$$

$$\alpha_0 := \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \text{es ex. } \beta \text{ mit } (\alpha,\beta) \in M \text{ und } \max(\alpha,\beta) = \mu_0\}$$

$$\beta_0 := \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid (\alpha_0,\beta) \in M \text{ und } \max(\alpha_0,\beta) = \mu_0\}.$$

Dann ist (α_0,β_0) das kleinste Element von M. ∎

Def + Bem. Da $(\mathrm{Ord},\in)$ und $(\mathrm{Ord}^2,<)$ echte wohlgeordnete Klassen sind, gibt es nach 5.6 (genau einen) Isomorphismus

$$K : (\mathrm{Ord}^2,<) \longrightarrow (\mathrm{Ord},\in).$$

Für jede Ordinalzahl ν ist $\nu \times \nu = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha < \nu, \beta < \nu\}$ echtes Anfangsstück von Ord^2 und daher $K[\nu\times\nu]$ echtes Anfangsstück von $(\mathrm{Ord},\in)$. Setzt man $k(\nu) := \min(\mathrm{Ord} \setminus K[\nu\times\nu])$, so ist $k(\nu) = K[\nu \times \nu]$. Die Abbildung $k : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ ist streng monoton, denn ist $\nu < \varepsilon$, so folgt $\nu\times\nu \subsetneqq \varepsilon\times\varepsilon$, $K[\nu\times\nu] = k(\nu) \subsetneqq K[\varepsilon\times\varepsilon] = k(\varepsilon)$, da K injektiv, also $k(\nu) < k(\varepsilon)$. – Nach 5.2 gilt

$$\nu \le k(\nu) \quad \text{für jedes } \nu \in \mathrm{Ord}.$$

12.3. Satz Für jede unendliche Kardinalzahl κ gilt:

a) $K[\kappa\times\kappa] = k(\kappa) = \kappa$

b) $\kappa\cdot\kappa = \kappa$.

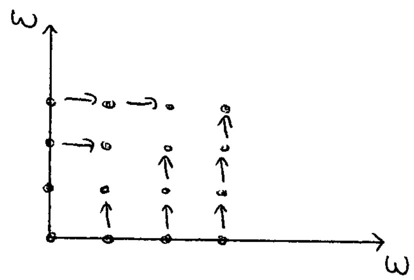
Beweis. Aus $k(\kappa) = \kappa$ folgt $\kappa\cdot\kappa = \kappa$, denn da $|\kappa| = \kappa$, gilt

$$\kappa\cdot\kappa = |\kappa\times\kappa| = |K[\kappa\times\kappa]| \quad \text{da } K \text{ injektiv}$$
$$= |k(\kappa)| = |\kappa| = \kappa.$$

Wir zeigen a) durch Induktion über κ.

Fall 1: $\kappa = \omega$. Wegen $\omega \le k(\omega)$ ist nur $k(\omega) \le \omega$, d.h.

$k(\omega) \subseteq \omega$ zu zeigen, d. h. $K[\omega \times \omega] \subseteq \omega$, d. h.: für $(m,n) \in \omega \times \omega$ ist $K(m,n) \in \omega$.



Veranschaulichung: die ersten Elemente von Ord^2 bzgl. $<$ sind:

$$(0,0) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,2) < (1,2) < (2,0) < (2,1) < (2,2) < \dots$$

d. h. $K(0,0) = 0$, $K(0,1) = 1, \dots,$ $K(2,2) = 8, \dots, K(n,n) = n^2 - 1 \dots$

Fall 2: $\kappa > \omega$. Für jede unendliche Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ sei $\lambda \cdot \lambda = \lambda$.
Annahme: $\kappa < k(\kappa)$. Dann ist $\kappa \in k(\kappa) = K[\kappa \times \kappa]$; sei $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$ mit $K(\alpha,\beta) = \kappa$. Wähle $\delta \in Ord$ mit $\alpha, \beta < \delta < \kappa$ (etwa $\delta := \max(\alpha,\beta) + 1$) und setze $\lambda := |\delta|$.
Es ist $\max(\alpha,\beta) \geq \omega$ (denn sonst wäre nach Fall 1 $\kappa = K(\alpha,\beta) < \omega$), also $\lambda \geq \omega$. Wegen $(\alpha,\beta) \in \delta \times \delta$

$$K(\alpha,\beta) = \kappa \in K[\delta \times \delta] = k(\delta)$$

$$\kappa \in k(\delta)$$

$$\begin{aligned} \kappa = |\kappa| \leq |k(\delta)| &= |K[\delta \times \delta]| \\ &= |\delta \times \delta| \quad \text{da } K \text{ bijektiv} \\ &= |\delta| \cdot |\delta| \\ &= \lambda \cdot \lambda \\ &= \lambda \quad \text{da } \omega \leq \lambda < \kappa. \end{aligned}$$

Widerspruch zu $\lambda \leq \delta < \kappa$! ∎

12.4. Satz κ, λ seien Kardinalzahlen mit $\kappa \geq \omega$ oder $\lambda \geq \omega$. Dann ist $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Falls $\kappa, \lambda \neq 0$, ist $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa,\lambda)$.

Beweis. Sei oBdA $\kappa \leq \lambda$, und damit $\omega \leq \lambda$. OBdA sei $1 \leq \kappa$. Es ist $\max(\kappa,\lambda) = \lambda$ und nach 12.1, 12.3

$$\lambda = 0 + \lambda \leq \kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$$

$$\lambda = 1 \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$$

also $\kappa + \lambda = \lambda = \kappa \cdot \lambda$. ∎

Folgerung Sei $\kappa \in Card$, $\omega \leq \kappa$. Es ist $\kappa^0 = 1$, $\kappa^1 = \kappa$, $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa = \kappa$, $\kappa^3 = \kappa^2 \cdot \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$ usw., also $\kappa^n = \kappa$ für $1 \leq n < \omega$.

Für die Berechnung von κ^λ für $\kappa \geq 2, \lambda \geq \omega$ hat man keine 12.4 entsprechenden Formeln. Man weiß nur: ist x Menge mit $|x| = \kappa$, so $|P(x)| = |{}^{x}2| = 2^\kappa$ und $\kappa = |x| < |P(x)| = 2^\kappa$ nach 11.1. D.h.

$$\kappa < 2^\kappa$$

für jede Kardinalzahl κ. In Kapitel 14 werden wir eine weitere Ungleichung für 2^κ gegenüber κ herleiten. Da $\kappa < 2^\kappa$, ist für unendliches κ $\kappa^+ \leq 2^\kappa$. Die folgende Aussage wird als „Allgemeine Kontinuumhypothese" (GCH = "generalized continuum hypothesis") bezeichnet:

(GCH) Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist $2^\kappa = \kappa^+$ – d.h. für jedes $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ist $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Die spezielle Kontinuumhypothese ist:

(CH) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Weder GCH (bzw. CH) noch die Negation von GCH (bzw. CH) lassen sich aus den ZF-Axiomen beweisen. Man kann zeigen: falls ZFC widerspruchsfrei ist, d.h. falls es überhaupt Modelle von ZFC gibt, so gibt es

a) Modelle von ZFC, in denen GCH gilt (Gödel)

b) Modelle von ZFC, in denen GCH auf vorgeschriebene Weise zerstört ist – z.B. Modelle, in denen $2^\kappa = \kappa^{+++}$ für jedes $\kappa \geq \omega$, das regulär ist (siehe Kapitel 13) (Cohen, Easton).

Die Frage, wie weit GCH für singuläres κ (siehe Kapitel 13) zerstört werden kann, wird uns in Kapitel 17 beschäftigen.

<u>12.5. Folgerung</u> Sind κ, μ Kardinalzahlen mit $2 \leq \mu \leq 2^\kappa$, $\omega \leq \kappa$, so ist $\mu^\kappa = 2^\kappa$. Insbesondere ist $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.

Beweis. $2^\kappa \leq \mu^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$ nach 12.1, 12.3. ∎

13. Reguläre und singuläre Kardinalzahlen

<u>Def + Wied</u> Lim sei die Klasse aller Limesordinalzahlen. Ist $\alpha \in \mathrm{Ord}$ und $M \subseteq \alpha$, so sei der Ordnungstyp von M die Ordinalzahl $\beta = \mathrm{ot}(M)$ mit $(M, <) \cong (\beta, \in)$; man kann dann M in der Form $M = \{m_\xi \mid \xi < \beta\}$ mit $\xi < \xi' < \beta \Rightarrow m_\xi < m_{\xi'}$ schreiben ($m_\xi := f(\xi)$, wobei $f : (\beta, \in) \xrightarrow{\cong} (M, <)$). $(m_\xi \mid \xi \in \beta)$ heißt die monotone Aufzählung von M. – Ist $\alpha \in \mathrm{Lim}$ und $M \subseteq \alpha$, so heißt M kofinal in α, falls

$\sup M = \alpha$, d.h. es ex. kein $\xi < \alpha$ mit $m \leq \xi$ für $m \in M$

d.h. zu jedem $\xi < \alpha$ ex. $m \in M$ mit $\xi < m$.

Sei $\lambda \in \mathrm{Ord}$, $\alpha \in \mathrm{Lim}$ und $f : \lambda \to \alpha$. Statt f schreiben wir auch $(a_\xi)_{\xi<\lambda}$, wobei $a_\xi = f(\xi)$; f heißt eine Folge vom Typ λ.