Beweis. V sei Vektorraum über dem Körper K. Setze
$$P := \{U \subseteq V \mid U \text{ ist linear unabhängig}\}.$$
$P \neq \emptyset$, da $U := \emptyset \in P$. Wegen $P \subseteq P(V)$ und (Pot) ist P Menge. Setzt man für $U, V \in P$
$$U \leq V :\Leftrightarrow U \subseteq V,$$
so ist $(P, <)$ halbgeordnete Menge. Ist $K \subseteq P$ Kette, so zeigt man leicht, daß $\bigcup K$ eine obere Schranke von K in P ist. – Sei nun nach dem Zornschen Lemma $B \subseteq V$ maximales Element von P. D.h.: B ist linear unabhängig, und jede echte Obermenge von B in V ist linear abhängig. Daher weiß man, daß B Basis von V ist.

11. Kardinalzahlen

Wir definieren in diesem Kapitel die Klasse Card der Kardinalzahlen als eine Teilklasse der Ordinalzahlen. Ebenso, wie man in Kapitel 8 definierte:
$$|e| = n, \text{ d.h. } e \text{ hat genau } n \text{ Elemente} :\Leftrightarrow \text{ es gibt eine Bijektion von } n \text{ auf } e$$
zeigen wir dann, daß für jede Menge x, die sich wohlordnen läßt, genau eine Kardinalzahl κ existiert, die sich bijektiv auf x abbilden läßt – und setzen dann $|x| := \kappa$. Unter Voraussetzung von AC ist dann $|x|$ für jede Menge x definiert. Zunächst zwei Sätze, die sich ohne AC beweisen lassen.

11.1. Lemma x sei eine Menge. Es gibt ein injektives $f: x \to P(x)$ und ein bijektives $g: P(x) \to {}^x 2$, aber kein surjektives (und daher auch kein bijektives) $h: x \to P(x)$.

Beweis. Für $y \in x$ sei $f(y) := \{y\}$. Für $z \subseteq x$ sei $g(z): x \to 2 = \{0,1\}$ die „charakteristische Funktion" von z:
$$g(z)(y) := \begin{cases} 1 & \text{für } y \in z \\ 0 & \text{für } y \in x \setminus z. \end{cases}$$
Sei nun $h: x \to P(x)$; setze $z := \{y \in x \mid y \notin h(y)\}$; also $z \subseteq x$. Wäre $z \in \text{rbh}$, etwa $z = h(y)$ mit $y \in x$, so gälte
$$y \in h(y) \Leftrightarrow y \in z \Leftrightarrow y \notin h(y);$$
Widerspruch! – Also ist h nicht surjektiv. ∎

11.2. Satz (Cantor-Bernsteinscher Äquivalenzsatz) A und C seien Mengen, $g: A \to C$ und $h: C \to A$ injektiv. Dann gibt es eine Bijektion von A auf C.

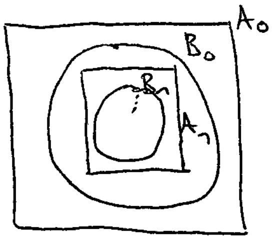
Beweis. $f := h \circ g: A \to A$ ist injektiv. Setzt man $B := h[C]$, so gilt
$$g[A] \subseteq C, \quad h[g[A]] = f[A] \subseteq h[C] = B \subseteq A,$$
und f bildet A bijektiv auf $f[A]$ ab. Da C von h bijektiv

auf B abgebildet wird, reicht es, eine Bijektion $\varphi : A \to B$ anzugeben, wobei $f[A] \subseteq B \subseteq A$ gilt.
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_n, B_n \subseteq A$ definiert durch:

$$A_0 := A \qquad\qquad B_0 := B$$
$$A_{n+1} := f[A_n] \qquad\qquad B_{n+1} := f[B_n].$$

Man hat:

$$(*) \quad A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq A_2 \supseteq B_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots :$$



denn $A_0 = A \supseteq B = B_0 \supseteq f[A] = A_1$; ist $A_n \supseteq B_n \supseteq A_{n+1}$, so folgt durch Anwenden von f: $A_{n+1} \supseteq B_{n+1} \supseteq A_{n+2}$.
Sei

$$R := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \left(= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right).$$

$\dot\cup$, $\dot\bigcup$ bedeute die Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen. Wegen $(*)$ gilt

$$A = A_0 = (A_0 \setminus B_0) \,\dot\cup\, (B_0 \setminus A_1) \,\dot\cup\, (A_1 \setminus B_1) \,\dot\cup\, (B_1 \setminus A_2) \,\dot\cup \dots \dot\cup\, R$$
$$B = B_0 = (B_0 \setminus A_1) \,\dot\cup\, (A_1 \setminus B_1) \,\dot\cup \dots \dot\cup\, R;$$

setzt man $D_n := A_n \setminus B_n$, $E_n := B_n \setminus A_{n+1}$, so ist

$$A = \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \,\dot\cup\, \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \,\dot\cup\, R$$
$$B = \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{n+1} \,\dot\cup\, \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \,\dot\cup\, R.$$

Da f injektiv, ist $f[D_n] = f[A_n] \setminus f[B_n] = D_{n+1}$.
Folgende Abbildung $\varphi : A \to A$ bildet A bijektiv auf $B \subseteq A$ ab: für $x \in D_n$ sei $\varphi(x) = f(x)$; für $x \in E_n$ sei $\varphi(x) = x$; für $x \in R$ sei $\varphi(x) = x$ (φ überführt D_n in D_{n+1}, E_n in E_n, R in R). ∎

<u>Def</u> Sind x, y Mengen, so bedeute $x \approx y$ („x ist gleichmächtig zu y"), daß eine Bijektion von x auf y existiert."
Eine Ordinalzahl κ heißt Kardinalzahl, falls es keine Ordinalzahl α mit $\alpha < \kappa$ und $\alpha \approx \kappa$ gibt.

$$\mathrm{Card} := \{\kappa \mid \kappa \text{ ist Kardinalzahl}\},$$

die Klasse aller Kardinalzahlen, ist dann als Teilklasse von Ord wohlgeordnet.

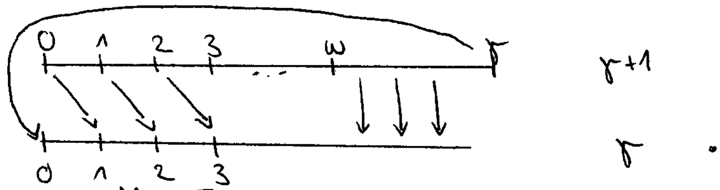
<u>11.3. Lemma</u> a) Jede natürliche Zahl ist Kardinalzahl; ω (die kleinste unendliche Ordinalzahl) ist Kardinalzahl.

b) Jede unendliche Kardinalzahl ist Limesordinalzahl.

c) Ist M Menge von Kardinalzahlen, so ist die Ordinalzahl $\sup M$ $(= \bigcup M)$ Kardinalzahl.

Beweis. a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha < n$, so $\alpha \in \mathbb{N}$ und $\alpha \not\approx n$ nach 8.3. Ist $\alpha < \omega$, so $\alpha \in \mathbb{N}$ und wieder nach 8.3 $\alpha \not\approx \omega$.

b) Sei γ unendliche Ordinalzahl; wir zeigen, daß $\gamma+1$ keine Kardinalzahl sein kann. Es ist $\gamma+1 = \gamma \cup \{\gamma\}$ und, da $\omega \leq \gamma$, $\{0,1,2,\dots\} = \omega \subseteq \gamma$. Die Abbildung $f : \gamma+1 \to \gamma$ mit $f(\gamma) = 0$, $f(n) = n+1$ für $n \in \omega$, $f(\alpha) = \alpha$ für $\omega \leq \alpha < \gamma$ ist Bijektion:



c) Setze $\kappa := \sup M$. Falls $M = \emptyset$, ist $\kappa = \bigcup M = \emptyset = 0$ Kardinalzahl. Falls M ein größtes Element μ hat, ist $\kappa = \mu$ Kardinalzahl. Nun sei $M \neq \emptyset$ ohne größtes Element. Wäre κ nicht Kardinalzahl, so existierte $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $\alpha < \kappa$, und $f : \kappa \to \alpha$ bijektiv. Wegen $\kappa = \sup M$ existiert $\mu \in M$ mit $\alpha < \mu < \kappa$. $f \restriction \mu$ bildet μ injektiv in α ab; $id_\alpha : \alpha \to \alpha \subseteq \mu$ bildet α injektiv in μ ab. Nach 11.2 ist $\alpha \approx \mu$, aber $\mu \in M$ war Kardinalzahl! ■

<u>Bem + Def</u> Ist $(x,<)$ eine wohlgeordnete Menge, so existiert (genau ein) $\alpha \in \mathrm{Ord}$ mit $(x,<) \cong (\alpha, \in_\alpha)$. Insbesondere ist $C := \{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \alpha \approx x\}$ nichtleer. Sei $|x|$, die „Kardinalzahl von x", das kleinste Element von C. Setzt man AC voraus, so ist wegen 1.0.1 $|x|$ für jede Menge x definiert.

$\kappa := |x|$ ist Kardinalzahl, denn wäre $\beta \in \mathrm{Ord}$ mit $\beta < \kappa$, $\beta \approx \kappa$, so folgte $\beta \approx x$ im Widerspruch zur Minimalität von κ in C.

κ ist die einzige Kardinalzahl μ mit $\mu \approx x$ – denn wäre $\mu \in \mathrm{Card}$, $\mu \neq \kappa$, $\mu \approx x$, so sei oBdA $\mu < \kappa$. Dann wäre wegen $\mu \approx \kappa$, daß $\kappa \notin \mathrm{Card}$. Also:

$|x| =$ diejenige Kardinalzahl κ, die sich bijektiv auf x abbilden läßt.

Da $\kappa \approx \kappa$, gilt außerdem $|\kappa| = \kappa$ für jede Kardinalzahl κ.

<u>11.4 Lemma</u> x, y seien Mengen, $x \neq \emptyset$.

a) $|x| = |y|$ genau dann, wenn es eine Bijektion $f : x \to y$ gibt.

b) Es sind äquivalent: (i) $|x| \leq |y|$

(ii) es gibt ein injektives $f : x \to y$

(iii) es gibt ein surjektives $g : y \to x$.

Beweis. a) Ist $|x| = |y| =: \kappa$, so gilt $x \approx \kappa \approx y$, also $x \approx y$. Ist umgekehrt $x \approx y$ und $\kappa := |x|$, so hat man $\kappa \approx x$, $\kappa \approx y$, $\kappa = |y|$.

b) Sei $\kappa := |x|$, $\mu := |y|$.
(i) $\Rightarrow$ (ii): seien $f: x \to \kappa$, $g: \mu \to y$ bijektiv und $\kappa \leq \mu$, also $\kappa \subseteq \mu$. Dann ist $id_\kappa: \kappa \to \kappa \subseteq \mu$ injektiv und $g \circ id_\kappa \circ f: x \to y$ injektiv.
(ii) $\Rightarrow$ (i): sei $f: x \to y$ injektiv. Annahme $\mu < \kappa$. Dann ist $\mu \subseteq \kappa$, $id_\mu: \mu \to \kappa$ injektiv und nach 11.2 $x \approx y$, $\kappa = \mu$; Widerspruch!
(ii) $\Rightarrow$ (iii): sei z ein beliebiges Element von x. Ist $f: x \to y$ injektiv, so sei $g: y \to x$ die Funktion mit $g(t) = f^{-1}(t)$ für $t \in \operatorname{rb} f$, $g(t) = z$ für $t \in y \setminus \operatorname{rb} f$. g ist surjektiv.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): $g: y \to x$ sei surjektiv; daher ist für $t \in x$ $M_t := \{s \in y \mid g(s) = t\}$ nichtleer. Sei (mit AC) f eine Auswahlfunktion für die Familie $(M_t \mid t \in x)$. D.h. $f: x \to y$ und f ist injektiv. ∎

<u>Bem + Def</u> Zu jeder Kardinalzahl κ gibt es eine Kardinalzahl μ mit $\kappa < \mu$: sei x eine Menge mit $|x| = \kappa$ (etwa $x = \kappa$). Nach 11.1 und 11.4 ist $\kappa = |x| < |P(x)|$. – Daher existiert

$$\kappa^+ := \min\{\mu \in Card \mid \kappa < \mu\}.$$

Die folgende Funktion $\aleph: Ord \to Card$ ($\aleph$ = Aleph = erster Buchstabe des hebräischen Alphabets) zählt die unendlichen Kardinalzahlen monoton auf; für $\alpha \in Ord$ schreibt man $\aleph_\alpha$ statt $\aleph(\alpha)$:

$$\aleph_0 := \omega$$
$$\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+$$
$$\aleph_\lambda := \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \quad \text{falls } \lambda \text{ Limesordinalzahl.}$$

Die Aleph-Funktion ist streng monoton, also injektiv, und Card daher echte Klasse. Jede unendliche Kardinalzahl κ hat die Form $\aleph_\alpha$ für (genau) ein $\alpha \in Ord$: andernfalls sei $\mu := \min(Card \setminus \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in Ord\})$. Für jedes α ist $\aleph_\alpha < \mu$. Da $(Ord, <)$ wohlgeordnet ist, muß $\{\xi \in Ord \mid \xi < \mu\}$ Menge sein; Widerspruch! – Also

$$Card \setminus \omega = \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in Ord\}.$$

$\kappa = \aleph_\alpha$ heißt Nachfolgerkardinalzahl, falls α Nachfolgerordinalzahl (d.h. $\alpha = \beta + 1$ und $\kappa = (\aleph_\beta)^+$), Limeskardinalzahl, falls α Limesordinalzahl ist.