10. Das Auswahlaxiom und einige Äquivalenzen

<u>Def</u> Sei I eine Menge und $F = (X_i \mid i \in I)$ eine mit I indizierte Familie von Mengen (d. h. F ist eine Funktion mit $\mathrm{vb}\,F = I$; X_i ist Kurzschreibweise für $F(i)$). Eine Auswahlfunktion für F ist eine Funktion

$$c : I \to \bigcup \{X_i \mid i \in I\}$$

mit $c(i) \in X_i$ für alle $i \in I$. c wählt also aus jedem X_i ein Element $c(i)$ aus. – Eine solche Funktion c kann natürlich nur existieren, wenn alle X_i nichtleer sind.

Nun sagt das Auswahlaxiom (AC = "axiom of choice"):

(AC) Jede Familie $(X_i \mid i \in I)$ von nichtleeren Mengen X_i hat eine Auswahlfunktion.

<u>Bem</u> Das Auswahlaxiom gehört nicht zu den ZF-Axiomen. Es ist insofern von ihnen unabhängig, als weder AC noch seine Negation aus den ZF-Axiomen bewiesen werden können. AC spielt auch insofern eine Sonderrolle, als viele seiner Konsequenzen sehr paradox klingen, was an der völlig unkonstruktiven Natur dieses Axioms liegt (AC behauptet die Existenz einer Auswahlfunktion, gibt aber keine solche Funktion explizit an). Ab Kapitel 11 werden wir unsere Beweise fast immer in der Mengenlehre

$$\mathrm{ZFC} := \text{die ZF-Axiome, verstärkt um das Auswahlaxiom}$$

(kurz: $\mathrm{ZFC} = \mathrm{ZF} + \mathrm{AC}$) führen, ohne die Benutzung von AC immer hervorzuheben.

<u>Wied + Def</u> Eine halbgeordnete Menge war ein Paar $(P, <)$, wobei die Relation $<$ auf der Menge P irreflexiv und transitiv ist (siehe Kapitel 4). $K \subseteq P$ heißt eine Kette in P (bzgl. $<$), falls K durch $<$ total geordnet wird, d. h. falls für $x, y \in K$ $x = y$ oder $x < y$ oder $y < x$ gilt. $s \in P$ heißt obere Schranke von $K \subseteq P$, falls $x \leq s$ für alle $x \in K$. $m \in P$ heißt maximales Element von P, falls kein $y \in P$ mit $m < y$ existiert.

<u>Bem</u> 1. In den meisten Anwendungen des folgenden Zornschen Lemmas sind die Elemente von P Mengen, und die Relation $<$ ist definiert durch: $x < y :\Leftrightarrow x$ ist echte Teilmenge von y. Ist dann $K \subseteq P$ Kette, so ist häufig $\bigcup K \in P$; $\bigcup K$ ist dann obere Schranke (sogar Supremum) von K in P.

2. Außer dem Wohlordnungssatz und dem Zornschen Lemma gibt es noch zahlreiche weitere zum Auswahlaxiom äquivalente Prinzipien,

etwa das Hausdorffsche Maximalkettenprinzip, das Tukeysche Lemma ... Eine gute Übersicht findet man in dem Buch "General Topology" von Kelley, S. 31–36.

<u>10.1. Satz</u> Folgende Aussagen sind äquivalent, genauer: ihre Äquivalenz läßt sich ohne Benutzung des Auswahlaxioms zeigen:

(a) das Auswahlaxiom

(b) (Zermelosches Wohlordnungssatz) auf jeder Menge X gibt es eine Relation $<$, die X wohlordnet

(c) (Zornsches Lemma) ist $(P,<)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge und hat jede Kette in P eine obere Schranke, so hat P ein maximales Element.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): X sei eine Menge. Nach AC sei c eine Auswahlfunktion auf $P(X)\setminus\{\phi\}$; für $M\subseteq X$, $M\neq\phi$ ist also $c(M)\in M$. Sei u eine Menge, die nicht Element von X ist (etwa $u := X$ mit (Fund)). Wir definieren induktiv

$$F:\mathrm{Ord}\longrightarrow X\cup\{u\}:$$

sei $\alpha\in\mathrm{Ord}$ und $F(\beta)$ bereits definiert für $\beta<\alpha$. Setze

$$F(\alpha):=\begin{cases} u & \text{falls } \beta<\alpha \text{ mit } F(\beta)=u \text{ existiert} \quad (1)\\ u & \text{falls } X=\{F(\beta)\mid \beta<\alpha\} \quad (2)\\ c(X\setminus\{F(\beta)\mid\beta<\alpha\}) & \text{sonst.} \quad (3)\end{cases}$$

Sei $C:=\{\beta\in\mathrm{Ord}\mid F(\beta)\in X\}$. Wegen (1) ist C Anfangsstück von Ord. Ist $\beta<\alpha$ und $\beta,\alpha\in C$, so ist nach (3) $F(\alpha)\in X\setminus\{F(\gamma)\mid\gamma<\alpha\}$, also $F(\alpha)\neq F(\beta)$. D.h.: $F\upharpoonright C: C\longrightarrow X$ ist injektiv; mit X ist nach (Ers) auch C Menge. Daher existiert $\alpha:=\min(\mathrm{Ord}\setminus C)$, und es ist $C=\alpha$. $f:=F\upharpoonright\alpha$ bildet $\alpha=C$ <u>auf</u> X ab, denn wäre $\{F(\beta)\mid\beta\in\alpha\}=f[\alpha]$ echte Teilmenge von X, so wäre nach (3) $\alpha\in C$!

Wir erhalten eine Wohlordnung auf X, indem wir die kanonische Wohlordnung auf α mit Hilfe der Bijektion f auf X übertragen: für $x,y\in X$ sei

$$x<y \ (\text{in } X) :\Longleftrightarrow f^{-1}(x)<f^{-1}(y) \ (\text{in Ord}).$$

(b) $\Rightarrow$ (c): sei $(P,<)$ halbgeordnete Menge; jede Kette in P habe eine obere Schranke. Annahme: P habe kein maximales Element. Nach (b) sei $\lessdot$ eine Wohlordnung auf P.

Wir definieren eine Funktion

$$s:\{K\subseteq P\mid K \text{ Kette in } P\}\longrightarrow P$$

mit: K Kette in $P\Rightarrow s(K)$ echte obere Schranke von K: sei $K\subseteq P$ Kette. Sei $x\in P$ eine obere Schranke von K; sei nach unserer Annahme $y\in P$ mit $x<y$. – Das heißt: $\{y\in P\mid k<y \text{ für alle } k\in K\}$

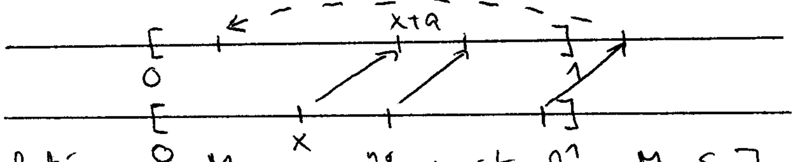
ist nichtleer; $s(K)$ sei das bzgl. $<$ kleinste Element dieser Menge. Wir kommen zum Widerspruch durch Konstruktion einer streng monotonen, also injektiven Funktion
$$F : \mathrm{Ord} \to P$$
(beachte: P ist Menge!): sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$; für $\beta < \alpha$ sei $F(\beta) \in P$ so, daß
$$\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow F(\beta) < F(\gamma).$$
Dann sei $F(\alpha) := s(K)$ mit $K := \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$.

(c) $\Rightarrow$ (a): $(X_i \mid i \in I)$ sei Familie von nichtleeren Mengen, I sei ebenfalls Menge. Setze
$$P := \{f \mid f \text{ ist Funktion}, \mathrm{vb}\, f \subseteq I, f(i) \in X_i \text{ für } i \in \mathrm{vb}\, f\}$$
(die Menge aller partiellen Auswahlfunktionen). $f := \emptyset$ (die leere Funktion) ist aus P, also $P \neq \emptyset$. P ist Menge, da $P \subseteq \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i \in I} X_i)$.

Für $f, g \in P$ sei
$$f \le g :\Leftrightarrow f \subseteq g$$
(d.h. wenn g Fortsetzung von f ist); $(P, <)$ ist Halbordnung, wenn man ($f < g :\Leftrightarrow f \le g$, und $f \neq g$) definiert. Ist $K \subseteq P$ Kette, so ist nach 6.2 $g := \bigcup K$ Funktion, und offensichtlich gilt $g \in P$; g ist obere Schranke von K. – Nach (b) hat P ein maximales Element c. Wir zeigen, daß $\mathrm{vb}\, c = I$ – dann ist c Auswahlfunktion für $(X_i \mid i \in I)$: wäre $\mathrm{vb}\, c \neq I$, so wähle $i \in I \setminus \mathrm{vb}\, c$ und ein $x \in X_i$. $f := c \cup \{(i, x)\}$ ist dann ein Element von P, das echt größer als c ist; Widerspruch. ∎

Wir skizzieren drei Anwendungen der in 10.1 genannten Prinzipien innerhalb der Mathematik.

<u>Bsp 1</u> (Eine Anwendung des Auswahlaxioms) Auf dem reellen Intervall $J := [0, 1]$ sei $\sim$ die Äquivalenzrelation
$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$
Nach (AC) sei $M \subseteq J$ eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse von J genau ein Element enthält (genauer: ist $\mathcal{P}$ die Menge der Restklassen von M bzgl. $\sim$ und c Auswahlfunktion für $\mathcal{P}$, so sei $M := \{c(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$. Für $a \in \mathbb{R}$, $0 \le a \le 1$ sei
$$M_a := \{x + a \mid x \in M, x + a \le 1\} \cup \{x + a - 1 \mid x \in M, 1 < x + a\}$$



die „Translation von M um a“; es ist also $M_a \subseteq J$. Bezeichnet μ das Lebesguesche Maß auf J, so gilt:

$\mu(M)$ existiert $\Rightarrow \mu(M_a)$ existiert, und $\mu(M_a) = \mu(M)$.
Man kann leicht zeigen:

(1) $a, b \in \mathbb{Q},\ 0 \le a, b \le 1,\ a \ne b \Rightarrow M_a \cap M_b = \emptyset$

(2) $\mathcal{J} = \bigcup \{M_a \mid a \in \mathbb{Q},\ 0 \le a \le 1\}$.

Die Auswahlmenge M ist nicht Lebesgue-meßbar: denn sonst sei $\varepsilon := \mu(M)$. Ist $\varepsilon = 0$, so $\mu(M_a) = 0$ für alle a, und $\mu(\mathcal{J}) = 0$, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und wegen (2). Ist $\varepsilon > 0$, so $\mu(M_a) = \varepsilon$ für alle a, und wegen (1) ist $\mu(\mathcal{J}) \ge \infty \cdot \varepsilon = \infty$. Widerspruch, da $\mu(\mathcal{J}) = 1$.

<u>Bsp 2</u> (Eine Anwendung des Wohlordnungssatzes) Sei $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper. Ein Polynom n-ten Grades über K ist ein Ausdruck

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \dots a_n \in K$, $a_n \ne 0$. $p(x) := 0$ sei das Nullpolynom.
p heißt konstantes Polynom, falls $p = 0$ oder p vom Grad 0 ist.
$u \in K$ heißt Nullstelle von p, falls $p(u) = a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0 = 0$.
$K = \mathbb{R}$ und $p(x) = x^2 + 1$ zeigen, daß nicht jedes Polynom über K eine Nullstelle in K haben muß; jedoch hat p in $\mathbb{C}$ die Nullstellen $\pm i$.

Eine wichtige Aussage der Körpertheorie ist:

(*) Zu jedem Körper K gibt es einen Oberkörper L, so daß jedes nichtkonstante Polynom p über K eine Nullstelle in L hat.

Beweis von (*): man kann zu jedem Körper K und jedem Polynom p über K mit $\mathrm{Grad}(p) \ge 1$ auf kanonische Weise einen Erweiterungskörper $E(K, p)$ von K konstruieren, in dem p eine Nullstelle hat.
Sei P die Menge aller nichtkonstanten Polynome über K und $<$ eine Wohlordnung auf P. Induktiv konstruiert man Erweiterungen L_p von K für $p \in P$, so daß

$$q < p \Rightarrow K \subseteq L_q \subseteq L_p.$$

Sei $p \in P$ und für $q < p$ bereits $L_q \supseteq K$ konstruiert mit:
$q < q' < p \Rightarrow K \subseteq L_q \subseteq L_{q'}$. Setze $F := \bigcup \{L_q \mid q \in P,\ q < p\}$;
F ist als Vereinigung einer Kette von Oberkörpern von K wieder Oberkörper von K, und p ist Polynom über F. Sei dann $L_p := E(F, p)$; es ist $K \subseteq F \subseteq L_p$.
Setzt man nun $L := \bigcup \{L_p \mid p \in P\}$, so hat jedes $p \in P$ (spätestens) in L_p und damit in $L \supseteq L_p$ eine Nullstelle.

<u>Bsp 3</u> (Eine Anwendung des Zornschen Lemmas) Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Beweis. V sei Vektorraum über dem Körper K. Setze
$$P := \{ U \subseteq V \mid U \text{ ist linear unabhängig} \}.$$
$P \neq \emptyset$, da $U := \emptyset \in P$. Wegen $P \subseteq \mathcal{P}(V)$ und (Pot) ist P Menge.
Setzt man für $U, V \in P$
$$U \leq V :\iff U \subseteq V,$$
so ist $(P, <)$ halbgeordnete Menge. Ist $K \subseteq P$ Kette, so zeigt man leicht, daß $\bigcup K$ eine obere Schranke von K in P ist. – Sei nun nach dem Zornschen Lemma $B \subseteq V$ maximales Element von P. D.h.: B ist linear unabhängig, und jede echte Obermenge von B in V ist linear abhängig. Daher weiß man, daß B Basis von V ist.

11. Kardinalzahlen

Wir definieren in diesem Kapitel die Klasse Card der Kardinalzahlen als eine Teilklasse der Ordinalzahlen. Ebenso, wie man in Kapitel 8 definierte:
$$|e| = n, \text{ d.h. } e \text{ hat genau } n \text{ Elemente} :\iff \text{es gibt eine Bijektion von } n \text{ auf } e$$
zeigen wir dann, daß für jede Menge x, die sich wohlordnen läßt, genau eine Kardinalzahl κ existiert, die sich bijektiv auf x abbilden läßt – und setzen dann $|x| := \kappa$. Unter Voraussetzung von AC ist dann $|x|$ für jede Menge x definiert. Zunächst zwei Sätze, die sich ohne AC beweisen lassen.

<u>11.1. Lemma</u> x sei eine Menge. Es gibt ein injektives $f: x \to \mathcal{P}(x)$ und ein bijektives $g: \mathcal{P}(x) \to {}^x2$, aber kein surjektives (und daher auch kein bijektives) $h: x \to \mathcal{P}(x)$.

Beweis. Für $y \in x$ sei $f(y) := \{y\}$. Für $z \subseteq x$ sei $g(z): x \to 2 = \{0,1\}$ die „charakteristische Funktion" von z:
$$g(z)(y) := \begin{cases} 1 & \text{für } y \in z \\ 0 & \text{für } y \in x \setminus z. \end{cases}$$
Sei nun $h: x \to \mathcal{P}(x)$; setze $z := \{ y \in x \mid y \notin h(y) \}$; also $z \subseteq x$.
Wäre $z \in \operatorname{nb} h$, etwa $z = h(y)$ mit $y \in x$, so gälte
$$y \in h(y) \iff y \in z \iff y \notin h(y);$$
Widerspruch! – Also ist h nicht surjektiv. ∎

<u>11.2. Satz</u> (Cantor-Bernsteinscher Äquivalenzsatz) A und C seien Mengen, $g: A \to C$ und $h: C \to A$ injektiv. Dann gibt es eine Bijektion von A auf C.

Beweis. $f := h \circ g: A \to A$ ist injektiv. Setzt man $B := h[C]$, so gilt
$$g[A] \subseteq C, \quad h[g[A]] = f[A] \subseteq h[C] = B \subseteq A,$$
und f bildet A bijektiv auf $f[A]$ ab. Da C von h bijektiv