und sagen: „e hat genau n Elemente" (denn ist $f: n \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow e$ und $x_k := f(k)$ für $k \in n$, so ist $e = \{f(0), \ldots, f(n-1)\}$ $= \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$).

Bem Es ist möglich, auch ohne Benutzung von natürlichen Zahlen endliche Mengen zu definieren. Siehe etwa die Begriffe „Tarski-endlich" und „Dedekind-endlich" im Buch "Set Theory" von Jech.

9. Fundierte Relationen; das Fundierungsaxiom

Def C sei eine Klasse und E eine Relation (nicht notwendig auf C!). $x \in C$ heißt E-minimal in C, falls kein $y \in C$ mit $y E x$ existiert. Für eine beliebige Menge x sei

$$\mathrm{ext}_E\, x := \{y \mid y E x\}$$

die „Extension von x bezüglich E".

Bsp + Bem Für eine Wohlordnung $<$ und $x \in \mathrm{fd} <$ ist $\mathrm{ext}_< x = {}_< x$. Ist $\bar{E} = \{(x,y) \mid x \in y\}$, die „$\in$-Relation", so ist für jede Menge x $\mathrm{ext}_E\, x = \{y \mid y \in x\} = x$. E heißt extensional, falls

$$\mathrm{ext}_E\, x = \mathrm{ext}_E\, y \Rightarrow x = y$$

für $x, y \in \mathrm{fd}\, E$. Das Extensionalitätsaxiom besagt also, daß die $\in$-Relation extensional ist.

Def Eine Relation E auf X heißt fundiert, falls

a) für jedes $x \in X$ ist $\mathrm{ext}_E\, x$ Menge

b) jede nichtleere Teilmenge a von X hat ein E-minimales Element.

Bem Fundierte Relationen und auch das folgende Fundierungsaxiom spielen eine große Rolle in Betrachtungen über Modelle der Mengenlehre, in unserer Vorlesung aber, von 9.5.c) abgesehen, kaum. In der Mathematik wird das Fundierungsaxiom eigentlich nie gebraucht.

Bsp + Bem Eine totale Ordnung auf X ist genau dann Wohlordnung, wenn sie fundiert ist. Wir werden in 9.3 und 9.4 sehen, daß induktive Beweis- und Konstruktionsprinzipien sich von Wohlordnungen auf fundierte Relationen verallgemeinern lassen.

9.1. Lemma E sei fundierte Relation auf X. Dann gibt es keine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X (d.h. keine Funktion $f: \mathbb{N} \to X$, $x_n := f(n)$) mit $x_1 E x_0$, $x_2 E x_1$, $x_3 E x_2, \ldots$; kurz

$$\ldots x_3 E x_2 E x_1 E x_0.$$

Beweis. Nach (Unendl) und (Ers) ist $a = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(= \text{rb } f)$ Teil<u>menge</u> von X; a ist nichtleer. Wäre $\dots x_2 \, E \, x_1 \, E \, x_0$, so hätte a kein E-minimales Element. ∎

<u>Folgerung</u> Sei E fundierte Relation auf X. Für kein $x \in X$ kann $x E x$ gelten (denn sonst $\dots x E x E x$). Ebenso kann für $x_1, x_2, \dots \in X$ nicht $x_1 E x_2 E x_1$ gelten (denn sonst $\dots x_1 E x_2 E x_1 E x_2 E x_1$) oder $x_1 E x_3 E x_2 E x_1$ usw.

<u>Bem</u> Setzt man das Auswahlaxiom voraus, so gilt umgekehrt: gibt es keine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $x_{n+1} E x_n$, so ist E fundiert.

<u>9.2. Lemma</u> E sei fundierte Relation auf X und $C \subseteq X$ nichtleere Klasse. Dann hat C ein E-minimales Element.

Beweis. Sei $c \in C$ beliebig gewählt. Ist c E-minimal, so sind wir fertig. Sei also c nicht E-minimal. Wir definieren Mengen s_n durch Induktion über n: es sei

$$s_0 := \text{ext}_E \, c$$

und $$s_{n+1} := \bigcup \{\text{ext}_E(x) \mid x \in s_n\};$$

die s_n sind Mengen, da E fundiert und wegen (Ers) und (Ver).

Sei

$$t := \bigcup \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\};$$

t ist Menge wegen (Unendl), (Ers) und (Ver). – Nun sei

$$a := t \cap C;$$

nach (Aus) ist a Menge. a ist nichtleer: da c nicht E-minimal war in C, ist $\text{ext}_E \, c \cap C = s_0 \cap C \neq \emptyset$, und $s_0 \cap C \subseteq t \cap C$. Sei daher $x \in a$ E-minimal in a; jedenfalls ist $x \in C$. Wir zeigen, daß x E-minimal in C: sei etwa, da $x \in t$, $x \in s_n$. Gäbe es $y \in C$ mit $y E x$, so wäre $y \in \text{ext}_E \, x$, $y \in s_{n+1} \subseteq t$ und wegen $y \in C$: $y \in a$; Widerspruch zur Wahl von x. ∎

Als Verallgemeinerung von 6.1 und 6.3 haben wir:

<u>9.3. Satz</u> (Beweis durch Induktion über E) E sei fundierte Relation auf X und $\Phi(x)$ eine Eigenschaft, die auf Elemente von X zutreffen kann. Für alle $x \in X$ gelte:

haben alle $y \in X$ mit $y E x$ die Eigenschaft Φ, so hat x die Eigenschaft Φ.

Dann haben <u>alle</u> $x \in X$ die Eigenschaft Φ.

Beweis. Andernfalls wäre

$$C := \{x \in X \mid x \text{ hat nicht die Eigenschaft } \Phi\}$$

nichtleer. Sei nach 9.2 $x \in C$ E-minimal in C. Alle $y \in X$

mit $y \mathrel{E} x$ sind nicht in C, haben also Φ. Also hat auch x die Eigenschaft Φ; $x \notin C$! ∎

<u>9.4. Satz</u> (Definition von Funktionen durch Induktion über E) E sei fundierte Relation auf X und $G: X \times V \to V$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F: X \to V$, so daß für alle $x \in X$

$$F(x) = G(x, F \upharpoonright \mathrm{ext}_E\, x). \blacksquare$$

Der Beweis von 9.4 ist dem von 6.3 sehr ähnlich, aber etwas aufwendiger. Das folgende Fundierungsaxiom erlaubt nun, diese Prinzipien auf die $\in$-Relation anzuwenden:

(Fund) Die $\in$-Relation ist fundiert (d.h.: ist x eine nichtleere Menge, so existiert $m \in x$ mit $m \cap x = \emptyset$).

<u>Bem</u> 1. Damit ist die Liste der Zermelo-Fraenkelschen Axiome abgeschlossen. Die ZF-Axiome sind also: (Ext), (Aus), (Null), (Pa), (Ver), (Pot), (Ers), (Unendl), (Fund).
2. Da für eine Menge x $\mathrm{ext}_\in x = x$, ist Teil a) der Definition einer fundierten Relation für die $\in$-Relation schon nach (Aus) und (Ext) erfüllt!

Unter Voraussetzung von (Fund) gelten folgende Spezialfälle von 9.3, 9.4:

<u>9.3' Satz</u> $\Phi(x)$ sei eine Eigenschaft, die auf Mengen zutreffen kann. Für jede Menge x gelte:
haben alle $y \in x$ die Eigenschaft Φ, so hat x die Eigenschaft Φ.
Dann haben <u>alle</u> Mengen x die Eigenschaft Φ. ∎

<u>9.4.' Satz</u> Sei $G: V \to V$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F: V \to V$, so daß für jede Menge x:

$$F(x) = G(F \upharpoonright x). \blacksquare$$

Als Anwendung von 9.3' zeigen wir in 9.5.c) eine Aussage über die Struktur $(V, \in)$: alle Mengen entstehen, ausgehend von der leeren Menge, durch Bildung von Potenzmengen und Vereinigungen.

<u>Def</u> Nach 6.3' definieren wir $F: \mathrm{Ord} \to V$; statt $F(\alpha)$ schreiben wir V_α:

$$V_0 := \emptyset \qquad V_{\alpha+1} := P(V_\alpha)$$

$$V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \quad \text{falls } \lambda \text{ Limeszahl.}$$

Wegen (Null), (Pot), (Ers) und (Ver) kann man induktiv zeigen, daß alle V_α Mengen sind.

9.5 Satz a) Jedes V_α ist transitiv.

b) Ist $\alpha \leq \beta$, so $V_\alpha \subseteq V_\beta$ (die V_α bilden eine „kumulative" Hierarchie)

c) $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha$, d.h. jede Menge x liegt in einem V_α.

Beweis. a) Induktion über α: $V_0 = \emptyset$ ist transitiv. – Sei V_α transitiv; sei $x \in y \in V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$. Dann ist $x \in y \subseteq V_\alpha$, $x \in V_\alpha$. Da V_α transitiv, ist $V_\alpha \subseteq P(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$, also $x \in V_{\alpha+1}$, q.e.d. – Ist λ Limeszahl und V_α transitiv für alle $\alpha < \lambda$, so ist V_λ als Vereinigung transitiver Mengen transitiv.

b) Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$ gegeben; wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $\beta \geq \alpha$. Ist $\beta = \alpha$, so $V_\alpha = V_\beta$. – Ist β Limeszahl und $\beta > \alpha$, so $V_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} V_\gamma \supseteq V_\alpha$. – Sei $\beta > \alpha$ und β von der Form $\beta = \gamma + 1$; sei $V_\alpha \subseteq V_\gamma$ (da $\alpha \leq \gamma$). Da V_γ transitiv ist, folgt
$V_\alpha \subseteq V_\gamma \subseteq P(V_\gamma) = V_{\gamma+1} = V_\beta$.

c) Wir zeigen die Behauptung

$$(*) \quad x \text{ Menge} \Rightarrow \text{es existiert } \alpha \in \mathrm{Ord} \text{ mit } x \in V_\alpha$$

durch $\in$-Induktion, d.h. nach 9.3'. Sei $(*)$ richtig für alle $y \in x$. Daher kann man eine Funktion

$$\left.\begin{array}{l} f : x \longrightarrow \mathrm{Ord} \\ y \in x \longmapsto \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid y \in V_\alpha\} \end{array}\right\}$$

definieren. Nach (Ers) (denn x ist Menge) und (Ver) ist

$$\sigma := \sup\{f(y) \mid y \in x\}$$

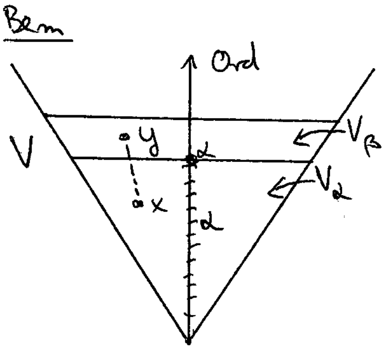
eine Ordinalzahl; setze $\alpha := \sigma + 1$. Für $y \in x$ gilt $y \in V_{f(y)} \subseteq V_\sigma$; d.h. $x \subseteq V_\sigma$ und $x \in V_{\sigma+1} = P(V_\sigma)$. ∎

Def Nach 9.5.c) existiert zu jeder Menge x ein kleinstes $\mu \in \mathrm{Ord}$ mit $x \in V_\mu$. Da $V_0 = \emptyset$, ist $\mu \neq 0$. Da für Limeszahlen λ $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$, kann μ keine Limeszahl sein. Daher kann man definieren:

$$\mathrm{rg}\, x := \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid x \in V_{\alpha+1}\},$$

der „Rang von x".

Bem



Man kann zeigen: $x \in y \Rightarrow \mathrm{rg}\, x < \mathrm{rg}\, y$; für $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ist $\mathrm{rg}\, \alpha = \alpha$ und $V_\alpha \cap \mathrm{Ord} = \alpha$. Anschauliche Vorstellung von $(V, \in)$: V ist Vereinigung der Mengen V_α; ist $x \in y$, so liegt x in V „tiefer" als y; auf Ord ist $\in$ eine Wohlordnung.